



Conditions équivalentes pour des couches minces ferromagnétiques. Etude du problème monodimensionnel

Houssem Haddar, Patrick Joly

► To cite this version:

Houssem Haddar, Patrick Joly. Conditions équivalentes pour des couches minces ferromagnétiques. Etude du problème monodimensionnel. [Rapport de recherche] RR-3431, INRIA. 1998. inria-00073259

HAL Id: inria-00073259

<https://inria.hal.science/inria-00073259>

Submitted on 24 May 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

***Conditions équivalentes pour
des couches minces ferromagnétiques.
Étude du problème monodimensionnel***

Houssem Haddar, Patrick Joly

N° 3431

Mai 1998

_____ THÈME 4 _____



***apport
de recherche***



Conditions équivalentes pour des couches minces ferromagnétiques. Étude du problème monodimensionnel

Houssem Haddar, Patrick Joly

Thème 4 — Simulation et optimisation
de systèmes complexes
Projet Ondes

Rapport de recherche n° 3431 — Mai 1998 — 60 pages

Résumé : Dans ce rapport, nous nous intéressons au problème général de la diffraction d'une onde électromagnétique par un objet parfaitement conducteur revêtu d'une fine couche ferromagnétique. Ces matériaux sont non linéaires et ont la propriété d'être absorbants. Le but poursuivi est l'obtention de conditions aux limites dites équivalentes pour éviter, pour la simulation numérique, la discrétisation des équations de Maxwell dans la couche ferromagnétique. Nous nous limitons dans ce premier travail au cas d'un modèle simple 1D. Ces conditions sont établies par une méthode formelle, basée sur un changement d'échelle et un développement asymptotique par rapport à l'épaisseur de la couche ferromagnétique. Sur le plan théorique, nous étudions la question fondamentale liée à la stabilité des nouveaux problèmes aux limites. Sur le plan numérique, nous proposons et analysons la stabilité de différents schémas de discrétisation et nous présentons des tests de comparaisons entre les solutions approchées et la solution exacte.

Mots-clé : équations de Maxwell, ferromagnétique, conditions équivalentes

(Abstract: pto)

Unité de recherche INRIA Rocquencourt
Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 LE CHESNAY Cedex (France)
Téléphone : 01 39 63 55 11 - International : +33 1 39 63 55 11
Télécopie : (33) 01 39 63 53 30 - International : +33 1 39 63 53 30

Effective Boundary Conditions for Thin Ferromagnetic Coatings. Study of the 1D Problem

Abstract: We study the scattering of an electromagnetic wave by a thin ferromagnetic coating. Ferromagnetic materials have non linear behavior and are used as absorbing coatings. The general goal of our study is the establishment of some boundary conditions, called Effective Boundary Conditions, that permit the modeling of these layers. By doing that, we avoid, for the numerical experiments, the expensive use of a meshing of the ferromagnetic layer. We consider in this first study only the simplified 1D model. To derive EBC's we use a formal method based on a scaling within the thin layer and an asymptotic expansion of the solution with respect to the thickness of the coating. We study then the fundamental theoretical question of the new boundary conditions stability. We end this work by studying the stability of different numerical schemes and by doing validating tests.

Key-words: Maxwell's equations, Ferromagnetism, Effective Boundary conditions

Table des matières

1	Présentation du problème	5
1.1	Motivation	5
1.2	Modélisation du ferromagnétisme	5
1.2.1	L'onde électromagnétique dans le vide	5
1.2.2	Le moment magnétique	6
1.2.3	Deux propriétés fondamentales	7
1.3	Diffraction par une couche mince ferromagnétique	8
1.3.1	Position du problème	8
1.3.2	Notion de conditions aux limites équivalentes	9
2	Dérivation des conditions équivalentes et étude de leur stabilité	11
2.1	Présentation du problème monodimensionnel	11
2.1.1	Changement d'échelle	12
2.1.2	Développement asymptotique et identification formelle	13
2.1.3	Principe de la dérivation des conditions équivalentes	14
2.1.4	Condition d'ordre 1	14
2.2	Dérivation et étude de la stabilité des conditions d'ordre 2 et d'ordre 3	15
2.2.1	Détermination de la condition d'ordre 2	15
2.2.2	Détermination de la condition d'ordre 3	17
2.2.3	Etude de la stabilité de la condition équivalente d'ordre 2	18
2.3	Dérivation et étude de la stabilité de la condition d'ordre 4	19
2.3.1	Détermination d'une première condition d'ordre 4	19
2.3.2	Caractère instable de la condition d'ordre 4	22
2.3.3	Nouvelle condition d'ordre 4	24
3	Analyse numérique	27
3.1	Formulation variationnelle du modèle continu	27
3.1.1	Semi discrétisation en espace des équations à l'intérieur de Ω_v	28
3.1.2	Traitement des conditions équivalentes	30
3.2	Discrétisation en temps	32
3.2.1	Discrétisation en temps de la condition équivalente d'ordre 2: schéma explicite	33
3.2.2	Discrétisation en temps de la condition équivalente d'ordre 2: schéma implicite	40
3.2.3	Discrétisation en temps de la condition équivalente d'ordre 4	43

4	Résultats numériques	46
4.1	Description des expériences	46
4.2	Validation de la condition d'ordre 2	47
4.2.1	Cas multi-couches	54
4.3	Amélioration apportée par la condition d'ordre 4	55
4.4	Apport des conditions équivalentes	57

Chapitre 1

Présentation du problème

1.1 Motivation

Un milieu ferromagnétique est constitué d'un matériau possédant une magnétisation naturelle. La propagation d'ondes électromagnétiques dans un tel milieu obéit à une interaction non linéaire entre le moment et le champ magnétique. Cette interaction induit généralement une dissipation significative de l'énergie de l'onde, ce qui constitue une propriété fort intéressante pour certaines applications industrielles. Tel est le cas, par exemple, des recherches en furtivité radar. Le plus souvent, l'épaisseur de la couche ferromagnétique est petite devant la longueur d'onde. C'est typiquement le cas d'une couche de peinture de ce matériau sur une surface réfléchissante. Il est alors tentant de remplacer les équations du milieu ferromagnétique par une condition aux limites approchée de type absorbant comme cela a été déjà fait dans le cas des matériaux linéaires [1] et [2]. Les motivations de ce choix sont d'ordre numérique. En effet, on cherche à éviter l'utilisation d'un pas de discrétisation en espace beaucoup plus petit qu'il ne le faut, en ayant à discrétiser en épaisseur le milieu ferromagnétique.

1.2 Modélisation du ferromagnétisme

1.2.1 L'onde électromagnétique dans le vide

Avant d'exposer le modèle de propagation d'ondes électromagnétiques dans un milieu ferromagnétique, nous allons rappeler les équations de Maxwell dans le vide. Soit en effet, le champ électrique $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$ et le champs magnétique $\mathbf{H}(\mathbf{x}, t)$ ainsi que leurs inductions correspondantes $\mathbf{D}(\mathbf{x}, t)$ et $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$, ils vérifient :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} - \text{rot } \mathbf{H} = 0 \\ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \text{rot } \mathbf{E} = 0. \end{cases} \quad (1.1)$$

A ces équations on rajoute les lois de comportements qui lient champs et inductions correspondantes. Dans le cas d'un matériau diélectrique linéaire, ces lois s'écrivent :

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \mu_0 \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) \quad (1.2)$$

$$\mathbf{D}(\mathbf{x}, t) = \varepsilon(\mathbf{x}) \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \quad (1.3)$$

où $\mu_0 = 4\pi 10^{-7}$ désigne la perméabilité magnétique dans le vide et $\varepsilon(x) > 0$ désigne la permittivité électrique. Dans le vide, on a $\varepsilon(x) = \varepsilon_0 = \mu_0/c^2$.

1.2.2 Le moment magnétique

Dans un milieu ferromagnétique saturé, la loi de comportement (1.3) fait intervenir, en plus du champ magnétique $\mathbf{H}(\mathbf{x}, t)$, un moment magnétique $\mathbf{M}(\mathbf{x}, t)$ lié à l'aimantation naturelle du milieu. Elle s'écrit :

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \mu_0(\mathbf{H}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{M}(\mathbf{x}, t)), \quad (1.4)$$

De sa part, le moment magnétique est lié au champ magnétique incident par une équation non linéaire dite équation de Landau-Lifschitz-Gilbert (LLG) [12], [7] :

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} = \gamma \mathbf{H}_T \times \mathbf{M} + \alpha \frac{\mathbf{M}}{|\mathbf{M}|} \times \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t}, \quad (1.5)$$

avec \mathbf{H}_T le champ magnétique total défini par :

$$\mathbf{H}_T = \mathbf{H} + \mathbf{H}_{eff}(\mathbf{M}), \quad (1.6)$$

le champ $\mathbf{H}_{eff}(\mathbf{M})$ est appelé champ magnétique effectif. Il regroupe la contribution de trois termes linéaires en \mathbf{M} :

$$\mathbf{H}_{eff}(\mathbf{M}) = \mathbf{H}_s + \mathbf{H}_a(\mathbf{M}) + \mathbf{H}_e(\mathbf{M}), \quad (1.7)$$

chacun de ces termes est défini par :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{H}_s = \mathbf{H}_s(\mathbf{x}) & : \text{champ extérieur statique (donné)} \\ \mathbf{H}_a(\mathbf{M}) = -K_a P(\mathbf{M}) & : \text{champ d'anisotropie} \\ \mathbf{H}_e(\mathbf{M}) = -K_e \Delta \mathbf{M} & : \text{champ d'échange} \end{array} \right. \quad (1.8)$$

Dans le système (1.8), K_a et K_e désignent des constantes positives qui peuvent dépendre de \mathbf{x} . D'autre part $P(\mathbf{M})$ est la projection orthogonale sur le plan orthogonal à un vecteur unitaire \mathbf{p} . Ce dernier est colinéaire à la direction de la facile aimantation du milieu (cette direction dépendant de la structure cristalline du matériau, peut dépendre de la position \mathbf{x}) :

$$P(\mathbf{M}) = \mathbf{M} - (\mathbf{p} \cdot \mathbf{M})\mathbf{p}. \quad (1.9)$$

Dans ce qui suit, nous allons négliger la contribution du champ d'échange $-K_e \Delta \mathbf{M}$, le lecteur pourra se référer à [12] pour plus de détail sur l'effet de ce terme. Il se trouve que cette hypothèse est parfaitement justifiable dans le cas des applications qui nous intéressent. L'équation (1.5) fait intervenir d'une part une constante universelle γ appelée facteur gyromagnétique, et d'autre part, un facteur d'amortissement α caractéristique du matériau ferromagnétique, qui peut dépendre de la position \mathbf{x} .

Nous pouvons finalement écrire les équations de Maxwell dans un milieu ferromagnétique sous la forme, $(\mathbf{E}, \mathbf{H}, \mathbf{M})$ étant les inconnues du problème :

$$\begin{cases} \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \text{rot } \mathbf{H} = 0 \\ \mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \text{rot } \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} \\ \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} = \gamma \mathbf{H}_T \times \mathbf{M} + \alpha \frac{\mathbf{M}}{|\mathbf{M}|} \times \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t}, \end{cases} \quad (1.10)$$

(Il faut ajouter bien sûr les conditions initiales ainsi que les conditions aux limites adéquates.)
On a posé dans ce système :

$$\mathbf{H}_T = \mathbf{H} + \mathbf{H}_s - K_a(\mathbf{M} - (p \cdot \mathbf{M})p). \quad (1.11)$$

1.2.3 Deux propriétés fondamentales

L'étude des propriétés mathématiques des équations (1.10) a été largement abordée par [8] dans le cas monodimensionnel. La preuve d'existence et d'unicité du cas général est démontrée dans [9]. Nous rappelons ici les deux propriétés fondamentales de (1.10) :

Conservation de la norme de l'aimantation

Prenant le produit scalaire de (1.5) par \mathbf{M} . On en déduit que :

$$\frac{1}{2} \frac{\partial |\mathbf{M}|^2}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} \cdot \mathbf{M} = 0.$$

Ainsi, pour presque tout \mathbf{x} du domaine ferromagnétique on a :

$$|\mathbf{M}(\mathbf{x}, t)| = |\mathbf{M}_0(\mathbf{x})|. \quad (1.12)$$

On constate alors qu'en tout point du milieu ferromagnétique, le moment magnétique solution de (1.5) admet un module indépendant du temps.

La décroissance de l'énergie

C'est à la fois une propriété mathématique de stabilité des solutions et une propriété physique de dissipation de l'énergie électromagnétique au cours du temps. En effet, en intégrant par partie les équations de Maxwell, et en tenant compte de la propriété (1.12) de \mathbf{M} , on établit l'identité suivante :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left\{ \underbrace{\frac{1}{2} \int [\varepsilon |\mathbf{E}|^2 + \mu_0 |\mathbf{H}|^2 + \mu_0 |\mathbf{H}_s - \mathbf{M}|^2 + \mu_0 K_a |p \cdot \mathbf{M}|^2] dx}_{\mathcal{E}(\mathbf{E}, \mathbf{H}, \mathbf{M})} \right\} \\ = -\mu_0 \int \frac{\alpha}{\gamma |\mathbf{M}|} \left| \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} \right|^2 dx \end{aligned} \quad (1.13)$$

$\mathcal{E}(\mathbf{E}, \mathbf{H}, \mathbf{M})$ désigne l'énergie électromagnétique de l'onde. On constate que c'est la variation temporelle du moment magnétique qui est responsable de la décroissance de cette énergie.

C'est plus précisément la présence du terme $\alpha \frac{\mathbf{M}}{|\mathbf{M}|} \times \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t}$ qui est à l'origine de cet effet, ce qui justifie le nom de facteur d'amortissement de α . Lorsque $\alpha = 0$ le système est conservatif.

Dans tout les cas, l'identité (1.13) montre que l'on peut contrôler à chaque instant la norme L^2 de la solution à l'aide de la norme L^2 des données initiales et ce, uniformément par rapport au temps :

$$\mathcal{E}(\mathbf{E}, \mathbf{H}, \mathbf{M}) \leq \mathcal{E}(\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0, \mathbf{M}_0) \quad (1.14)$$

Il s'agit d'une propriété que l'on essaiera de conserver par la suite lorsque nous construirons nos modèles de couche mince.

1.3 Diffraction par une couche mince ferromagnétique

Ayant introduit la notion de ferromagnétisme, nous allons maintenant présenter le problème lorsque le matériau ferromagnétique occupe un domaine de faible épaisseur. Généralement, dans ce genre de situation, ce qui nous intéresse le plus est non pas l'onde qui se propage à l'intérieur du milieu ferromagnétique, mais plutôt la partie diffractée par celui-ci. Nous introduisons dans le second sous paragraphe la notion de conditions aux limites équivalentes et les notions de stabilité et d'ordre de telles conditions.

1.3.1 Position du problème

Considérons donc un domaine Ω_0^η constitué d'un conducteur parfait. On note Γ^η la frontière de ce domaine. Le matériau ferromagnétique occupe le domaine Ω_f^η constitué d'une couche d'épaisseur η autour de Ω_0^η . On suppose que le volume de $\Omega_f^\eta \cup \Omega_0^\eta$ reste constant pour tout η . On note Ω_v le domaine du vide et Γ la frontière de $\mathbb{R}^3 \setminus \Omega_v$.

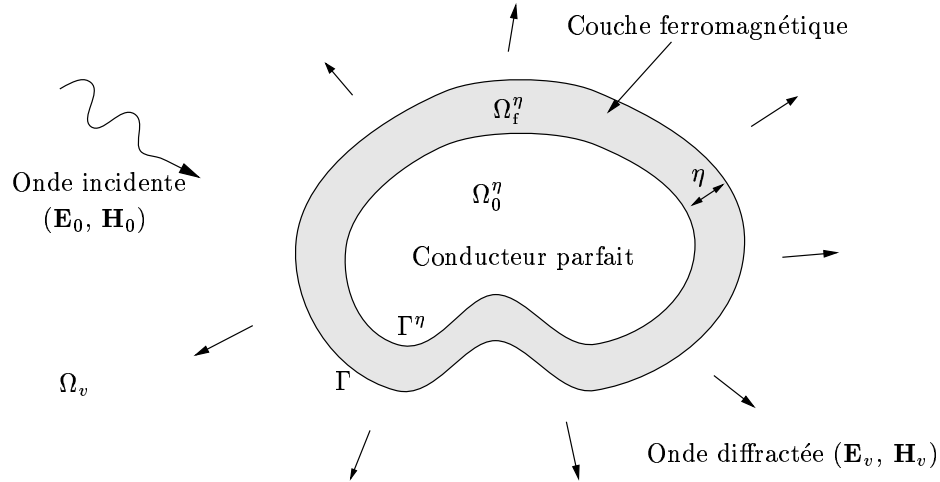


FIG. 1.1 – *Présentation du problème*

Considérons maintenant une “onde incidente” provenant du vide (c’est à dire une solution correspondant à des données initiales à $t = 0$ dont le support est contenu dans Ω_v). On note $(\mathbf{E}_v^\eta(\mathbf{x}, t), \mathbf{H}_v^\eta(\mathbf{x}, t))$ la solution dans Ω_v et $(\mathbf{E}_f^\eta(\mathbf{x}, t), \mathbf{H}_f^\eta(\mathbf{x}, t), \mathbf{M}_f^\eta(\mathbf{x}, t))$ la solution dans Ω_f^η .

Ces solutions vérifient les équations suivantes (au moins pour des données régulières) :

$$\varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}_v^\eta}{\partial t} - \text{rot } \mathbf{H}_v^\eta = 0 \quad ; \quad \mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}_v^\eta}{\partial t} + \text{rot } \mathbf{E}_v^\eta = 0 \quad \text{dans } \Omega_v \times]0, +\infty[, \quad (1.15)$$

$$\varepsilon^\eta \frac{\partial \mathbf{E}_f^\eta}{\partial t} - \text{rot } \mathbf{H}_f^\eta = 0 \quad ; \quad \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{H}_f^\eta + \mathbf{M}_f^\eta) + \text{rot } \mathbf{E}_f^\eta = 0 \quad \text{dans } \Omega_f \times]0, +\infty[, \quad (1.16)$$

où $\varepsilon^\eta(\mathbf{x})$ désigne la permittivité relative du milieu ferromagnétique. Le moment magnétique vérifie l'équation de Landau-Lifschitz-Gilbert (1.5) que l'on réécrit ici en faisant apparaître la dépendance en η des différents coefficients qui y interviennent.

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{M}_f^\eta}{\partial t} = \gamma \mathbf{H}_T^\eta \times \mathbf{M}_f^\eta + \alpha^\eta \frac{\mathbf{M}_f^\eta}{|\mathbf{M}_0^\eta|} \times \frac{\partial \mathbf{M}_f^\eta}{\partial t} \\ \mathbf{H}_T^\eta = \mathbf{H}_f^\eta + \mathbf{H}_s^\eta + K_a^\eta (p^\eta \cdot \mathbf{M}_f^\eta) p^\eta \end{cases} \quad (1.17)$$

A ces équations on rajoute la condition de réflexion sur le conducteur parfait :

$$\mathbf{E}_f^\eta(\mathbf{x}, t) \times \mathbf{n} = 0, \quad \text{sur } \Gamma^\eta \times]0, +\infty[, \quad (1.18)$$

(où $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ est un vecteur normal à Γ^η au point \mathbf{x}) et les conditions initiales :

$$\begin{cases} \mathbf{E}_v^\eta(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{E}_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{H}_v^\eta(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{H}_0(\mathbf{x}) & \text{dans } \Omega_v, \\ \mathbf{E}_f^\eta(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad \mathbf{H}_f^\eta(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad \mathbf{M}_f^\eta(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{M}_0^\eta(\mathbf{x}) & \text{dans } \Omega_f. \end{cases} \quad (1.19)$$

Les solutions assez régulières (par exemple dans H_{rot}) vérifient en plus les conditions de continuité suivantes à travers l'interface Γ

$$\mathbf{E}_f^\eta(\mathbf{x}, t) \times \mathbf{n} = \mathbf{E}_v^\eta(\mathbf{x}, t) \times \mathbf{n}, \quad \mathbf{H}_f^\eta(\mathbf{x}, t) \times \mathbf{n} = \mathbf{H}_v^\eta(\mathbf{x}, t) \times \mathbf{n} \quad \text{sur } \Gamma \times]0, +\infty[. \quad (1.20)$$

1.3.2 Notion de conditions aux limites équivalentes

De manière sommaire, nous désignerons par “conditions aux limites équivalentes” toutes conditions sur Γ qui permettent de modéliser l'existence de la couche ferromagnétique d'épaisseur η .

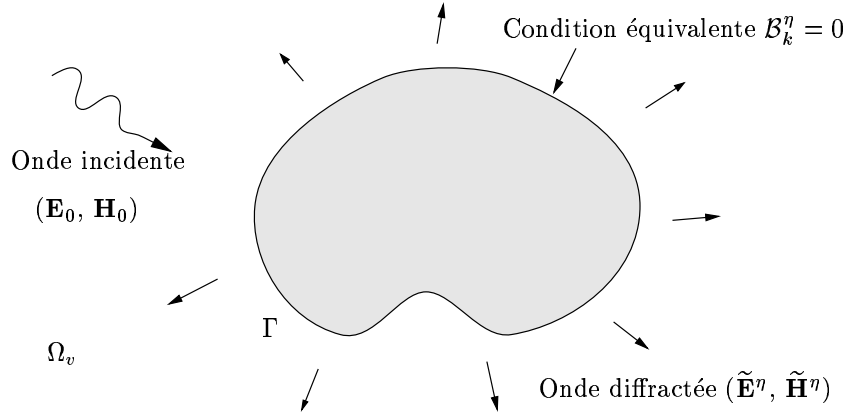
Plus précisément, considérons $(\tilde{\mathbf{E}}^\eta, \tilde{\mathbf{H}}^\eta)$ solutions sur Ω_v des équations de Maxwell (1.15) plus les conditions initiales (1.19) plus une condition aux limites sur Γ de la forme :

$$\mathcal{B}_k^\eta(\tilde{\mathbf{E}}^\eta \times \mathbf{n}, \tilde{\mathbf{H}}^\eta \times \mathbf{n}) = 0 \quad \text{sur } \Gamma \times]0, +\infty[, \quad (1.21)$$

où \mathcal{B}_k^η peut être exprimé à l'aide de certains opérateurs (probablement non linéaires). Voir figure (1.3.2).

La condition (1.21) constitue une condition aux limites équivalente admissible lorsqu'elle satisfait les critères suivants :

- 1) Stabilité : la condition est dite stable si on peut estimer à chaque instant $t, (t \rightarrow \infty)$ et pour tout épaisseur $\eta, (\eta \rightarrow 0)$ la norme $L^2(\Omega_v)$ de la solution approchée $(\tilde{\mathbf{E}}^\eta, \tilde{\mathbf{H}}^\eta)$ en fonction de la norme $L^2(\Omega_v)$ des données initiales, de manière indépendante de η et si possible uniforme en t .

FIG. 1.2 – *Problème approché*

- 2) Approximation en η^k : nous dirons que la condition (1.21) est une condition équivalente d'ordre k lorsque la solution $(\tilde{\mathbf{E}}^\eta, \tilde{\mathbf{H}}^\eta)$ approche l'onde réelle $(\mathbf{E}_v^\eta, \mathbf{H}_v^\eta)$ à η^k près. C'est à dire que pour une certaine norme $\|\cdot\|$, on peut établir l'estimation suivante :

$$\|(\mathbf{E}_v^\eta, \mathbf{H}_v^\eta) - (\tilde{\mathbf{E}}^\eta, \tilde{\mathbf{H}}^\eta)\| = O(\eta^k). \quad (1.22)$$

- 3) Implémentation numérique économique : c'est en effet tout l'intérêt de ces conditions équivalentes. La mise en œuvre informatique de (1.21) ne doit pas conduire pas à des calculs aussi chers en temps ou en mémoire de stockage, que le calcul de la solution exacte.

L'objectif du chapitre 2 est de présenter la construction formelle de conditions équivalente qui satisfont le critère 1.22 (de manière formelle à priori et dont la justification rigoureuse fera l'objet d'une future publication). On s'intéressera ensuite à l'étude de leur stabilité. L'analyse numérique des nouveaux problèmes fera l'objet du chapitre 3, avec notamment l'étude de stabilité des différents schémas qui seront proposés. Nous concluons ce travail par quelques résultats numériques qui valident l'intérêt et le bien fondé de notre démarche.

Chapitre 2

Dérivation des conditions équivalentes et étude de leur stabilité

2.1 Présentation du problème monodimensionnel

Le cas monodimensionnel a été étudié dans [5] et a constitué en quelques sortes le point de départ de cette étude asymptotique. Nous présentons ici une démarche légèrement différente qui consiste, d'une certaine manière, à ne pas approcher au même ordre en η le champ électrique et le moment magnétique. Nous justifierons que ce choix est valide par l'étude de stabilité. Nous obtiendrons alors la même condition d'ordre 2, mais des conditions d'ordre supérieur différentes. Nous allons présenter ici les calculs formels (plus simples que dans le cas général) qui mènent à ces conditions.

Nous supposons donc que les différents champs ne dépendent que d'une seule variable de l'espace x . Le vide occupe le demi espace $x < 0$ et contient le support de $(\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0)$. la couche ferromagnétique occupe l'intervalle $(0, \eta)$.

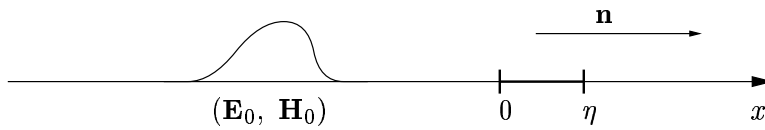


FIG. 2.1 – *Le cas monodimensionnel*

Dans ce cas, l'opérateur différentiel rot s'écrit tout simplement :

$$\text{rot } \mathbf{E} = \mathbf{n} \times \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x}$$

où \mathbf{n} désigne le vecteur normal unitaire $(1, 0, 0)$. Cette notation sera conservée dans toute la suite de ce rapport.

2.1.1 Changement d'échelle

La dérivation des conditions aux limites équivalentes repose d'abord sur un changement d'échelle à l'intérieur de la couche ferromagnétique qui permet d'enlever la dépendance de la géométrie du problème vis-à-vis du petit paramètre η . Cela se traduit par le changement de variable :

$$\xi = \frac{x}{\eta}, \quad x \in (0, \eta).$$

Nous posons alors :

$$(\widehat{\mathbf{E}}^\eta, \widehat{\mathbf{H}}^\eta, \widehat{\mathbf{M}}^\eta)(\xi, t) = (\mathbf{E}_f^\eta, \mathbf{H}_f^\eta, \mathbf{M}_f^\eta)(x, t), \quad \text{pour } x \in (0, \eta) \text{ et } \xi = \frac{x}{\eta}. \quad (2.1)$$

Nous supposons, par ailleurs, que les caractéristiques de la couche ferromagnétiques s'obtiennent à partir des caractéristiques d'une couche ferromagnétique fixe d'épaisseur unitaire par le changement d'échelle précédant. On suppose en effet l'existence de \mathbf{M}_0 , \mathbf{H}_s , α , K_a , p et ε , fonctions à supports dans $(0, 1)$ telles que pour tout $x \in (0, \eta)$ et pour $\xi = \frac{x}{\eta}$ on a :

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_0^\eta(x) &= \mathbf{M}_0(\xi), \quad \mathbf{H}_s^\eta(x) = \mathbf{H}_s(\xi), \quad \alpha^\eta(x) = \alpha(\xi), \\ \varepsilon^\eta(x) &= \varepsilon(\xi), \quad p^\eta(x) = p(\xi), \quad K_a^\eta(x) = K_a(\xi). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Nous sommes maintenant en mesure d'écrire les équations du problème vérifiées par les nouvelles inconnues $(\widehat{\mathbf{E}}^\eta, \widehat{\mathbf{H}}^\eta, \widehat{\mathbf{M}}^\eta)$:

(i) Equations de Maxwell adimensionnées

$$\forall \xi \in (0, 1) \quad \mathbf{n} \times \frac{\partial \widehat{\mathbf{H}}^\eta}{\partial \xi} = \varepsilon \eta \frac{\partial \widehat{\mathbf{E}}^\eta}{\partial t}; \quad \mathbf{n} \times \frac{\partial \widehat{\mathbf{E}}^\eta}{\partial \xi} = -\mu_0 \eta \frac{\partial}{\partial t} (\widehat{\mathbf{H}}^\eta + \widehat{\mathbf{M}}^\eta).$$

(ii) Equation LLG

$$\forall \xi \in (0, 1) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \widehat{\mathbf{M}}^\eta}{\partial t} &= \gamma \widehat{\mathbf{H}}_T^\eta \times \widehat{\mathbf{M}}^\eta + \alpha \frac{\widehat{\mathbf{M}}^\eta}{|\widehat{\mathbf{M}}_0|} \times \widehat{\mathbf{M}}^\eta \\ \widehat{\mathbf{H}}_T^\eta &= \widehat{\mathbf{H}}^\eta + \mathbf{H}_s + K_a(p \cdot \widehat{\mathbf{M}}^\eta) p. \end{aligned} \right. \quad (2.3)$$

(iii) Conditions de transmission

$$\widehat{\mathbf{E}}^\eta(0, t) \times \mathbf{n} = \mathbf{E}_v^\eta(0, t) \times \mathbf{n}; \quad \widehat{\mathbf{H}}^\eta(0, t) \times \mathbf{n} = \mathbf{H}_v^\eta(0, t) \times \mathbf{n}.$$

(iv) Condition aux limites

$$\widehat{\mathbf{E}}^\eta(1, t) \times \mathbf{n} = 0.$$

Rappelons finalement les équations dans le domaine du vide Ω_v restent inchangés et s'écrivent :

$$\forall x < 0 \quad \mathbf{n} \times \frac{\partial \mathbf{H}_v^\eta}{\partial x} = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}_v^\eta}{\partial t}; \quad \mathbf{n} \times \frac{\partial \mathbf{E}_v^\eta}{\partial x} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}_v^\eta}{\partial t}. \quad (2.4)$$

2.1.2 Développement asymptotique et identification formelle

L'épaisseur η de la couche ferromagnétique est supposée aussi petite que l'on souhaite. Cela nous permet de postuler l'existence d'un développement asymptotique de la solution du problème de la forme suivante :

$$\begin{cases} (\mathbf{E}_v^\eta, \mathbf{H}_v^\eta) &= (\mathbf{E}^0, \mathbf{H}^0) + \eta (\mathbf{E}^1, \mathbf{H}^1) + \eta^2 (\mathbf{E}^2, \mathbf{H}^2) + \dots \\ (\widehat{\mathbf{E}}^\eta, \widehat{\mathbf{H}}^\eta, \widehat{\mathbf{M}}^\eta) &= (\widehat{\mathbf{E}}^0, \widehat{\mathbf{H}}^0, \widehat{\mathbf{M}}^0) + \eta (\widehat{\mathbf{E}}^1, \widehat{\mathbf{H}}^1, \widehat{\mathbf{M}}^1) + \eta^2 (\widehat{\mathbf{E}}^2, \widehat{\mathbf{H}}^2, \widehat{\mathbf{M}}^2) + \dots \end{cases}$$

où tous les facteurs de η sont indépendants de η . En injectant ces expressions dans nos équations et en identifiant formellement les mêmes puissances en η , on aboutira à des systèmes d'équations indépendants de η . Ils permettent de déterminer de façon itérative les termes de notre développement asymptotique.

Nous allons commencer par écrire les problèmes auxiliaires issues de cette identification formelle dans les équations (2.3) et (2.4). Soit k un entier positif ou nul désignant l'exposant des termes du développement asymptotique, on a alors pour tout $t > 0$:

$$\begin{aligned} (i) \quad \forall x < 0 \quad \mathbf{n} \times \frac{\partial \mathbf{H}^k}{\partial x} &= \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}^k}{\partial t}; \quad \mathbf{n} \times \frac{\partial \mathbf{E}^k}{\partial x} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}^k}{\partial t} \\ (ii) \quad \forall \xi \in (0, 1) \quad \mathbf{n} \times \frac{\partial \widehat{\mathbf{H}}^{k+1}}{\partial \xi} &= \varepsilon \frac{\partial \widehat{\mathbf{E}}^k}{\partial t}; \quad \mathbf{n} \times \frac{\partial \widehat{\mathbf{E}}^{k+1}}{\partial \xi} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\widehat{\mathbf{H}}^k + \widehat{\mathbf{M}}^k) \\ (iii) \quad \forall \xi \in (0, 1) \quad \mathbf{n} \times \frac{\partial \widehat{\mathbf{H}}^0}{\partial \xi} &= 0; \quad \mathbf{n} \times \frac{\partial \widehat{\mathbf{E}}^0}{\partial \xi} = 0 \\ (iv) \quad \widehat{\mathbf{E}}^k(0, t) \times \mathbf{n} &= \mathbf{E}^k(0, t) \times \mathbf{n}; \quad \widehat{\mathbf{H}}^k(0, t) \times \mathbf{n} = \mathbf{H}^k(0, t) \times \mathbf{n} \\ (v) \quad \widehat{\mathbf{E}}^k(1, t) \times \mathbf{n} &= 0 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Les moments magnétiques $\widehat{\mathbf{M}}^k$ sont solutions des équations temporelles suivantes, pour tout $\xi \in (0, 1)$ et pour tout $t > 0$ (δ_0^k désignant le symbole de Kronecker) :

$$\begin{cases} \frac{\partial \widehat{\mathbf{M}}^k}{\partial t} = \sum_{i=0}^k \left(\gamma \widehat{\mathbf{H}}_T^i \times \widehat{\mathbf{M}}^{k-i} + \alpha \frac{\widehat{\mathbf{M}}^i}{|\mathbf{M}_0|} \times \frac{\partial \widehat{\mathbf{M}}^{k-i}}{\partial t} \right) \\ \widehat{\mathbf{H}}_T^k = \widehat{\mathbf{H}}^k + \delta_0^k \mathbf{H}_s + K_a(p \cdot \widehat{\mathbf{M}}^k)p \end{cases} \tag{2.6}$$

Enfin les conditions initiales :

$$\begin{cases} \mathbf{E}^k(x, 0) = \delta_0^k \mathbf{E}_0(x) & \mathbf{H}^k(x, 0) = \delta_0^k \mathbf{H}_0(x) \\ \widehat{\mathbf{E}}^k(\xi, 0) = 0 & \widehat{\mathbf{H}}^k(\xi, 0) = 0 \\ \widehat{\mathbf{M}}^k(\xi, 0) = \delta_0^k \mathbf{M}_0(\xi) \end{cases} \tag{2.7}$$

Remarque 2.1 La résolution de ces équations à l'intérieur de la couche ferromagnétique va nous permettre de passer à la détermination proprement dite des conditions aux limites

équivalentes. Nous constatons immédiatement, en prenant le produit scalaire des équations (2.5)(ii) par le vecteur normal \mathbf{n} , que les composantes normales vérifient pour tout $k \geq 0$:

$$\begin{aligned} \forall t > 0 \text{ et } \forall \xi \in (0, 1) : \quad & \left(\widehat{\mathbf{H}}^k(\xi, t) + \widehat{\mathbf{M}}^k(\xi, t) \right) \cdot \mathbf{n} = \delta_0^k \mathbf{M}_0(\xi) \cdot \mathbf{n} \\ & \widehat{\mathbf{E}}^k(\xi, t) \cdot \mathbf{n} = 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

Par conséquent, seules les composantes tangentiels restent à expliciter au cas par cas.

2.1.3 Principe de la dérivation des conditions équivalentes

D'après notre définition (cf chapitre 1) une condition équivalente est dite d'ordre $k + 1$ lorsque la solution $(\tilde{\mathbf{E}}^\eta, \tilde{\mathbf{H}}^\eta)$ du problème qui lui est associée vérifie l'estimation suivante pour une certaine norme $\|\cdot\|$:

$$\left\| (\mathbf{E}_v^\eta, \mathbf{H}_v^\eta) - (\tilde{\mathbf{E}}^\eta, \tilde{\mathbf{H}}^\eta) \right\| = O(\eta^{k+1})$$

Nous constatons alors (au moins formellement) qu'un bon candidat pour $(\tilde{\mathbf{E}}^\eta, \tilde{\mathbf{H}}^\eta)$ serait $(\overline{\mathbf{E}}^\eta, \overline{\mathbf{H}}^\eta) = (\mathbf{E}^0 + \dots + \eta^k \mathbf{E}^k, \mathbf{H}^0 + \dots + \eta^k \mathbf{H}^k)$. D'après les équations de (2.5)(i) et (2.6), ces deux troncatures sont bien solutions des équations de maxwell dans le vide :

$$\begin{cases} \varepsilon_0 \frac{\partial \overline{\mathbf{E}}^\eta}{\partial t} - \text{rot } \overline{\mathbf{H}}^\eta = 0 ; & \mu_0 \frac{\partial \overline{\mathbf{H}}^\eta}{\partial t} + \text{rot } \overline{\mathbf{E}}^\eta = 0 & \text{dans } \Omega_v \times]0, +\infty[, \\ \overline{\mathbf{E}}^\eta(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{E}_0(\mathbf{x}), \quad \overline{\mathbf{H}}^\eta(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{H}_0(\mathbf{x}) & \text{dans } \Omega_v. \end{cases} \quad (2.9)$$

D'autre part, en se servant des conditions de transmission (2.5)(iv), on peut écrire une condition aux limites en 0, sur $\overline{\mathbf{E}}^\eta$ par exemple, sous la forme suivante :

$$\overline{\mathbf{E}}^\eta(0, t) \times \mathbf{n} = \widehat{\mathbf{E}}^0(0, t) \times \mathbf{n} + \dots + \widehat{\mathbf{E}}^k(0, t) \times \mathbf{n}. \quad (2.10)$$

Pour obtenir une condition du type (1.21) il nous faut donc exprimer le second membre en fonction de $\overline{\mathbf{H}}^\eta(0, t) \times \mathbf{n}$. Nous verrons plus loin qu'il n'existe pas d'expression exacte qui lie les deux. Toutefois on peut établir une relation vérifiée à η^{k+1} près : c'est le principe de construction.

2.1.4 Condition d'ordre 1

D'après notre démarche la condition d'ordre 1 s'obtient en approchant la solution exacte sur Ω_v du problème par son développement asymptotique à l'ordre 1. Elle nécessite par (2.10) le calcul de $\widehat{\mathbf{E}}^0(0, t) \times \mathbf{n}$. Or nous déduisons de façon immédiate de (2.5)(iii) que ce champ est nul :

$$\widehat{\mathbf{E}}^0(\xi, t) \times \mathbf{n} = 0, \quad \text{pour tout } \xi \in (0, 1). \quad (2.11)$$

La condition équivalente d'ordre 1 est donc tout simplement :

$$\boxed{\tilde{\mathbf{E}}^\eta(0, t) \times \mathbf{n} = 0} \quad (2.12)$$

Cette condition est en fait naturelle, elle consiste à enlever tout simplement la couche ferromagnétique. Elle est toutefois inintéressante puisqu'elle ne prend pas en compte l'effet de la couche. Elle n'est satisfaisante que lorsque l'épaisseur de la couche devient presque nulle. Il nous faut donc aller plus loin dans notre développement pour aboutir à des conditions d'ordres supérieurs plus utiles, qui font intervenir le moment magnétique.

2.2 Dérivation et étude de la stabilité des conditions d'ordre 2 et d'ordre 3

2.2.1 Détermination de la condition d'ordre 2

La condition d'ordre 2 va provenir des approximations :

$$(\mathbf{E}^\eta, \mathbf{H}^\eta) \approx (\overline{\mathbf{E}}^\eta, \overline{\mathbf{H}}^\eta) = (\mathbf{E}^0, \mathbf{H}^0) + \eta (\mathbf{E}^1, \mathbf{H}^1) \quad \left\{ = (\mathbf{E}^\eta, \mathbf{H}^\eta) + O(\eta^2). \right\}$$

$$(\widehat{\mathbf{M}}^\eta, \widehat{\mathbf{H}}_T^\eta) \approx (\overline{\mathbf{M}}^\eta, \overline{\mathbf{H}}_T^\eta) = (\widehat{\mathbf{M}}^0, \widehat{\mathbf{H}}_T^0) \quad \left\{ = (\widehat{\mathbf{M}}^\eta, \widehat{\mathbf{H}}_T^\eta) + O(\eta). \right\}$$

On a :

$$\overline{\mathbf{E}}^\eta(0, t) \times \mathbf{n} = \widehat{\mathbf{E}}^0(0, t) \times \mathbf{n} + \eta \widehat{\mathbf{E}}^1(0, t) \times \mathbf{n}. \quad (2.13)$$

Le terme $\widehat{\mathbf{E}}^0 \times \mathbf{n}$ est déjà calculé par (2.11). Il nous reste à caractériser $\widehat{\mathbf{E}}^1(\xi, t) \times \mathbf{n}$ pour $\xi \in (0, 1)$. On intègre pour cela l'équation (2.5)(ii), écrite pour $k = 0$, entre ξ et 1, en utilisant la condition aux limites (2.5)(v). On en déduit alors :

$$\widehat{\mathbf{E}}^1(\xi, t) \times \mathbf{n} = -\mu_0 \int_\xi^1 \mathbf{n} \times \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left(\widehat{\mathbf{H}}^0(\zeta, t) + \widehat{\mathbf{M}}^0(\zeta, t) \right) \right\} \times \mathbf{n} d\zeta$$

que l'on peut écrire aussi sous la forme :

$$\mathbf{n} \times \left\{ \widehat{\mathbf{E}}^1(\xi, t) \times \mathbf{n} \right\} = \mu_0 \int_\xi^1 \frac{\partial}{\partial t} \left(\widehat{\mathbf{H}}^0(\zeta, t) + \widehat{\mathbf{M}}^0(\zeta, t) \right) \times \mathbf{n} d\zeta$$

D'autre part, l'équation (2.5)(iii), écrite pour $k = 0$, nous donne après intégration :

$$\forall \xi \in (0, 1), \quad \widehat{\mathbf{H}}^0(\xi, t) \times \mathbf{n} = \widehat{\mathbf{H}}^0(0, t) \times \mathbf{n} = \mathbf{H}^0(0, t) \times \mathbf{n} \quad (2.14)$$

Ainsi, $\forall \xi \in (0, 1)$:

$$\mathbf{n} \times \left\{ \widehat{\mathbf{E}}^1(\xi, t) \times \mathbf{n} \right\} = \mu_0 (1 - \xi) \frac{\partial \mathbf{H}^0}{\partial t}(0, t) \times \mathbf{n} + \mu_0 \int_\xi^1 \frac{\partial \widehat{\mathbf{M}}^0}{\partial t}(\zeta, t) \times \mathbf{n} d\zeta \quad (2.15)$$

Nous constatons alors que :

$$\mathbf{n} \times \left(\overline{\mathbf{E}}^\eta(0, t) \times \mathbf{n} \right) = \mu_0 \eta \left\{ \frac{\partial \overline{\mathbf{H}}^\eta}{\partial t}(0, t) \times \mathbf{n} + \int_0^1 \frac{\partial \overline{\mathbf{M}}^\eta}{\partial t}(\xi, t) \times \mathbf{n} d\xi \right\} + O(\eta^2). \quad (2.16)$$

Remarque 2.2 *Le choix naturel aurait été d'utiliser pour l'expression de $\overline{\mathbf{M}}^\eta$ les deux premiers termes du développement asymptotique de $\widehat{\mathbf{M}}^\eta$ et donc d'approcher ce champ à η^2 près (comme c'est le cas de [5]). Cependant en observant la relation (2.16) on constate que pour déterminer la valeur tangentielle de $\overline{\mathbf{E}}^\eta(0, t)$ à η^2 près, il suffit, à cause du η en facteur du second membre, d'avoir une approximation de $\widehat{\mathbf{M}}^\eta$ à η^1 seulement. Ce choix n'a pas d'incidence sur l'expression de (2.16), mais il modifie l'expression de la loi qui détermine $\overline{\mathbf{M}}^\eta$, qui est a priori plus complexe dans [5] que dans notre cas.*

La relation (2.16) constitue bien une condition aux limites du type (1.21). Il faut la compléter par la détermination de $\overline{\mathbf{M}}^\eta \times \mathbf{n}$ qui est simplement donné par l'équation (2.6) écrite pour $k = 0$:

$$\frac{\partial \overline{\mathbf{M}}^\eta}{\partial t} = \gamma \overline{\mathbf{H}}_T^\eta \times \overline{\mathbf{M}}^\eta + \alpha \frac{\overline{\mathbf{M}}^\eta}{|\mathbf{M}_0|} \times \frac{\partial \overline{\mathbf{M}}^\eta}{\partial t} \quad (2.17)$$

Il reste maintenant à réécrire l'équation de $\overline{\mathbf{H}}_T^\eta$ en fonction de $\overline{\mathbf{H}}^\eta$ et de $\overline{\mathbf{M}}^\eta$. Un calcul simple montre que :

$$\overline{\mathbf{H}}_T^\eta = \mathbf{n} \times (\overline{\mathbf{H}}^\eta \times \mathbf{n}) + ((\mathbf{M}_0 - \overline{\mathbf{M}}^\eta) \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} + \mathbf{H}_s + K_a(p \cdot \overline{\mathbf{M}}^\eta)p + O(\eta) \quad (2.18)$$

Nous proposons alors une condition équivalente d'ordre 2 en regroupant (2.16), (2.17) et (2.18) et en supprimant les termes en $O(\eta^2)$ dans l'expression (2.16) et les termes en $O(\eta)$ dans (2.18) : (la notation $\overline{\mathbf{E}}^\eta$, $\overline{\mathbf{H}}^\eta$ et $\overline{\mathbf{M}}^\eta$ devient alors $\widetilde{\mathbf{E}}^\eta$, $\widetilde{\mathbf{H}}^\eta$ et $\widetilde{\mathbf{M}}^\eta$)

$$\mathbf{n} \times (\widetilde{\mathbf{E}}^\eta(0, t) \times \mathbf{n}) = \mu_0 \eta \left\{ \frac{\partial \widetilde{\mathbf{H}}^\eta}{\partial t}(0, t) \times \mathbf{n} + \int_0^1 \frac{\partial \widetilde{\mathbf{M}}^\eta}{\partial t}(\xi, t) \times \mathbf{n} d\xi \right\}$$

Avec $\widetilde{\mathbf{M}}^\eta$ solution sur $(0, 1)$ de :

$$\begin{cases} \frac{\partial \widetilde{\mathbf{M}}^\eta}{\partial t} = \gamma \widetilde{\mathbf{H}}_T^\eta \times \widetilde{\mathbf{M}}^\eta + \alpha \frac{\widetilde{\mathbf{M}}^\eta}{|\mathbf{M}_0|} \times \frac{\partial \widetilde{\mathbf{M}}^\eta}{\partial t} \\ \widetilde{\mathbf{H}}_T^\eta = \mathbf{n} \times (\widetilde{\mathbf{H}}^\eta(0, t) \times \mathbf{n}) + ((\mathbf{M}_0 - \widetilde{\mathbf{M}}^\eta) \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} + \mathbf{H}_s + K_a(p \cdot \widetilde{\mathbf{M}}^\eta)p. \end{cases}$$

(2.19)

Remarque 2.3 Soit $\overline{\mathbf{M}}^\eta = \sum_{i=0}^k \eta^i \widehat{\mathbf{M}}^i$, et soit $\overline{\mathbf{H}}_T^\eta = \sum_{i=0}^k \eta^i \widehat{\mathbf{H}}_T^i$, alors $\overline{\mathbf{M}}^\eta$ vérifie l'équation (LLG) (2.17) à des termes en (η^{k+1}) près.

Il s'agit simplement de refaire le calcul inverse de l'identification formelle. En effet :

$$\gamma \overline{\mathbf{H}}_T^\eta \times \overline{\mathbf{M}}^\eta + \alpha \frac{\overline{\mathbf{M}}^\eta}{|\mathbf{M}_0|} \times \frac{\partial \overline{\mathbf{M}}^\eta}{\partial t} = \sum_{0 \leq i, j \leq k} \eta^{i+j} \gamma \widehat{\mathbf{H}}_T^i \times \widehat{\mathbf{M}}^j + \eta^{i+j} \alpha \frac{\widehat{\mathbf{M}}^i}{|\mathbf{M}_0|} \times \frac{\partial \widehat{\mathbf{M}}^j}{\partial t} + O(\eta^{k+1})$$

On peut décomposer la somme qui figure au second membre en deux termes :

$$\sum_{0 \leq i, j \leq k} = \sum_{0 \leq i+j \leq k} + \sum_{i+j \geq k+1}$$

et remarquer que η^{k+1} se met en facteur de la deuxième somme qui de ce fait est un $O(\eta^{k+1})$. Ainsi on obtient en faisant en plus le changement de variable $(i, j) = (i + j, j)$ dans la première somme :

$$\gamma \overline{\mathbf{H}}_T^\eta \times \overline{\mathbf{M}}^\eta + \alpha \frac{\overline{\mathbf{M}}^\eta}{|\mathbf{M}_0|} \times \frac{\partial \overline{\mathbf{M}}^\eta}{\partial t} = \sum_{0 \leq i \leq k} \eta^i \sum_{0 \leq j \leq i} \gamma \widehat{\mathbf{H}}_T^j \times \widehat{\mathbf{M}}^{i-j} + \alpha \frac{\widehat{\mathbf{M}}^j}{|\mathbf{M}_0|} \times \frac{\partial \widehat{\mathbf{M}}^{i-j}}{\partial t} + O(\eta^{k+1}).$$

D'après (2.6) le second membre n'est autre que :

$$\sum_{i=0}^k \eta^i \frac{\partial \widehat{\mathbf{M}}^i}{\partial t} + O(\eta^{k+1}) = \frac{\partial \overline{\mathbf{M}}^\eta}{\partial t} + O(\eta^{k+1})$$

ce qui prouve le résultat énoncé.

2.2.2 Détermination de la condition d'ordre 3

Nous allons démontrer dans ce qui suit que cette condition coïncide avec la condition d'ordre 2. Ce résultat n'est valable que dans le cas monodimensionnel. Il vient du fait que le premier terme du développement asymptotique de $\widehat{\mathbf{E}}^\eta$ est nul. Ainsi les deux premiers termes du développement $\widehat{\mathbf{H}}^\eta$ sont découplés et admettent les mêmes expressions.

Soit en effet l'approximation suivante de $(\mathbf{E}^\eta, \mathbf{H}^\eta)$:

$$(\mathbf{E}^\eta, \mathbf{H}^\eta) \approx (\overline{\mathbf{E}}^\eta, \overline{\mathbf{H}}^\eta) = (\mathbf{E}^0, \mathbf{H}^0) + \eta (\mathbf{E}^1, \mathbf{H}^1) + \eta^2 (\mathbf{E}^2, \mathbf{H}^2).$$

On a alors :

$$\overline{\mathbf{E}}^\eta(0, t) \times \mathbf{n} = \left\{ \widehat{\mathbf{E}}^0 + \eta \widehat{\mathbf{E}}^1 + \eta^2 \widehat{\mathbf{E}}^2 \right\} (0, t) \times \mathbf{n}. \quad (2.20)$$

$\widehat{\mathbf{E}}^0 \times \mathbf{n}$ et $\widehat{\mathbf{E}}^1 \times \mathbf{n}$ sont donnés par (2.11) et (2.15). Caractérisons maintenant $\widehat{\mathbf{E}}^2(\xi, t) \times \mathbf{n}$ pour $\xi \in (0, 1)$. Remarquons d'abord que $\widehat{\mathbf{E}}^0(\xi, t) = 0$, (regrouper (2.11) et (2.8)). L'équation (2.5)(ii), pour $k = 0$, nous donne alors :

$$\forall \xi \in (0, 1), \quad \widehat{\mathbf{H}}^1(\xi, t) \times \mathbf{n} = \widehat{\mathbf{H}}^1(0, t) \times \mathbf{n} = \mathbf{H}^1(0, t) \times \mathbf{n} \quad (2.21)$$

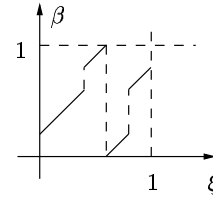
Ainsi, le même calcul effectué pour $\widehat{\mathbf{E}}^1 \times \mathbf{n}$ donne la même expression pour $\widehat{\mathbf{E}}^2 \times \mathbf{n}$, à savoir : $\forall \xi \in (0, 1)$,

$$\mathbf{n} \times \left\{ \widehat{\mathbf{E}}^2(\xi, t) \times \mathbf{n} \right\} = \mu_0 (1 - \xi) \frac{\partial \mathbf{H}^1}{\partial t}(0, t) \times \mathbf{n} + \mu_0 \int_\xi^1 \frac{\partial \widehat{\mathbf{M}}^1}{\partial t}(\zeta, t) \times \mathbf{n} d\zeta \quad (2.22)$$

Nous constatons alors, en posant : $\overline{\mathbf{M}}^\eta(\xi, t) = \widehat{\mathbf{M}}^0(\xi, t) + \eta \widehat{\mathbf{M}}^1(\xi, t)$ qu'à des termes en η^3 près, la relation (2.16) reste valable. Par ailleurs, d'après la remarque (2.3), $\overline{\mathbf{M}}^\eta$ vérifie l'équation (2.5) à des termes en η^2 près avec $\overline{\mathbf{H}}_T^\eta = \widehat{\mathbf{H}}_T^0 + \eta \widehat{\mathbf{H}}_T^1$. On constate facilement en utilisant (2.21) et (2.8) que la relation (2.18) est encore valide. La condition d'ordre 3 admet donc la même expression que la condition d'ordre 2 (dans le cas 1D).

Remarque 2.4 Les conditions d'ordre 2 et 3 en 1D ne tiennent pas compte de la répartition du moment magnétique à l'intérieur de la couche ferromagnétique.

En effet, soit \mathcal{M}_0 une nouvelle distribution du moment magnétique initial. Plus précisément, on se donne une bijection β de $(0, 1)$ dans lui même, telle que pour toute fonction f intégrable sur $(0, 1)$, $f \circ \beta$ l'est aussi, et on a : $\int f d\xi = \int f \circ \beta d\xi$. On pose alors $\mathcal{M}_0(\xi) = \mathbf{M}_0(\beta(\xi))$ et $\mathcal{H}_s(\xi) = \mathbf{H}_s(\beta(\xi))$, et on considère $\widetilde{\mathcal{M}}^\eta$ solution de :



$$\begin{cases} \frac{\partial \widetilde{\mathcal{M}}^\eta}{\partial t} = \gamma \widetilde{\mathcal{H}}_T^\eta \times \widetilde{\mathcal{M}}^\eta + \alpha \frac{\widetilde{\mathcal{M}}^\eta}{|\mathcal{M}_0|} \times \frac{\partial \widetilde{\mathcal{M}}^\eta}{\partial t} \\ \widetilde{\mathcal{H}}_T^\eta(\xi) = \mathbf{n} \times \left(\widetilde{\mathbf{H}}^\eta(0, t) \times \mathbf{n} \right) + \left((\mathcal{M}_0 - \widetilde{\mathcal{M}}^\eta) \cdot \mathbf{n} \right) \mathbf{n} + \mathcal{H}_s + K_a(p \cdot \widetilde{\mathcal{M}}^\eta)p. \end{cases}$$

Une telle solution vérifie : $\widetilde{\mathcal{M}}^\eta(\xi) = \widetilde{\mathbf{M}}^\eta(\beta(\xi))$, ce qui prouve que $(\widetilde{\mathbf{E}}^\eta, \widetilde{\mathbf{H}}^\eta, \widetilde{\mathcal{M}}^\eta)$ satisfait aussi la condition aux limites (2.16). Nous verrons que ce n'est plus le cas de la condition d'ordre 4.

2.2.3 Etude de la stabilité de la condition équivalente d'ordre 2

Après avoir construit les conditions aux limites équivalentes, il est naturel d'étudier en premier lieu leur stabilité. Cette question est d'une importance capitale pour la mise en œuvre numérique, mais aussi pour la justification théorique de l'ordre d'approximation qu'apportent ces conditions. Notre problème étant non linéaire, nous allons utiliser une méthode énergétique pour avoir des estimations à priori de la norme de la solution en fonction des données initiales.

Nous reprenons ici les notations du paragraphe précédent. On considère $(\tilde{\mathbf{E}}^\eta, \tilde{\mathbf{H}}^\eta)$ solution des équations de Maxwell dans le vide (2.9) couplées avec la condition aux limites d'ordre 2 donnée par (2.19). Soit d'autre part \mathcal{E}_v^η l'énergie électromagnétique associée à cette onde :

$$\mathcal{E}_v^\eta(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_v} \left(\varepsilon_0 |\tilde{\mathbf{E}}^\eta|^2 + \mu_0 |\tilde{\mathbf{H}}^\eta|^2 \right) dx \quad (2.23)$$

et \mathcal{E}_f^η l'énergie propre du milieu ferromagnétique adimensionné :

$$\mathcal{E}_f^\eta(t) = \frac{\mu_0}{2} \int_0^1 \left(|(\mathbf{M}_0 - \widetilde{\mathbf{M}}^\eta) \cdot \mathbf{n}|^2 + K_a |p \cdot \widetilde{\mathbf{M}}^\eta|^2 + |\mathbf{H}_s - \widetilde{\mathbf{M}}^\eta|^2 \right) d\xi. \quad (2.24)$$

Le théorème suivant donne une estimation à priori de la dérivée temporelle de ces énergies semblable à celle donnée dans la chapitre 1 pour un milieu ferromagnétique.

Théorème 2.1 *Soit $(\tilde{\mathbf{E}}^\eta, \tilde{\mathbf{H}}^\eta)$ une solution suffisamment régulière des équations de Maxwell (2.9) couplées avec la condition d'ordre 2 donnée par (2.19). Soit d'autre part le champ de vecteurs tangentiels φ^η défini par :*

$$\varphi^\eta(t) = \mathbf{n} \times (\tilde{\mathbf{H}}^\eta(0, t) \times \mathbf{n}) = (0, \varphi_y^\eta, \varphi_z^\eta). \quad (2.25)$$

On a alors l'identité suivante :

$$\frac{d}{dt} \{ \mathcal{E}_v^\eta(t) + \eta \mathcal{E}_f^\eta(t) + \eta \mathcal{E}_r^\eta(t) \} + \eta \frac{\mu_0}{\gamma} \int_0^1 \frac{\alpha}{|\mathbf{M}_0|} \left| \frac{\partial \widetilde{\mathbf{M}}^\eta}{\partial t} \right|^2 d\xi = 0, \quad (2.26)$$

où on a posé :

$$\mathcal{E}_r^\eta(t) = \frac{\mu_0}{2} |\varphi^\eta|^2 \quad (2.27)$$

Preuve : En multipliant les deux équations de (2.9) respectivement par $\tilde{\mathbf{E}}^\eta$ et $\tilde{\mathbf{H}}^\eta$, on obtient, après avoir intégré par partie sur Ω et avoir appliqué la formule de Green :

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\varepsilon_0 |\tilde{\mathbf{E}}^\eta|^2 + \mu_0 |\tilde{\mathbf{H}}^\eta|^2) dx \right\} + \mathbf{n} \times (\tilde{\mathbf{E}}^\eta \times \mathbf{n}) \cdot (\varphi^\eta \times \mathbf{n}) = 0. \quad (2.28)$$

En prenant le produit scalaire de (2.19) par φ^η , on obtient :

$$\eta \frac{\mu_0}{2} \frac{d}{dt} |\varphi^\eta|^2 + \eta \mu_0 \int_0^1 \frac{\partial \widetilde{\mathbf{M}}^\eta}{\partial t} \cdot \varphi^\eta d\xi = \mathbf{n} \times (\tilde{\mathbf{E}}^\eta \times \mathbf{n}) \cdot (\varphi^\eta \times \mathbf{n}). \quad (2.29)$$

En regroupant (2.28) et (2.29) on obtient :

$$\frac{d}{dt} \{ \mathcal{E}_v^\eta(t) + \eta \mathcal{E}_f^\eta(t) \} + \eta \mu_0 \int_0^1 \frac{\partial \widetilde{\mathbf{M}}^\eta}{\partial t} \cdot \varphi^\eta d\xi = 0 \quad (2.30)$$

L'équation de Landau-Lifschitz-Gilbert vérifié par $\widetilde{\mathbf{M}}^\eta$:

$$\frac{\partial \widetilde{\mathbf{M}}^\eta}{\partial t} = \gamma \widetilde{\mathbf{H}}_T^\eta \times \widetilde{\mathbf{M}}^\eta + \frac{\alpha}{|\mathbf{M}_0|} (\widetilde{\mathbf{M}}^\eta \times \frac{\partial \widetilde{\mathbf{M}}^\eta}{\partial t}),$$

nous montre, en la multipliant successivement par $\widetilde{\mathbf{H}}_T^\eta$ et $\frac{\partial \widetilde{\mathbf{M}}^\eta}{\partial t}$ que :

$$\frac{\partial \widetilde{\mathbf{M}}^\eta}{\partial t} \cdot \widetilde{\mathbf{H}}_T^\eta = \frac{\alpha}{\gamma |\mathbf{M}_0|} \left| \frac{\partial \widetilde{\mathbf{M}}^\eta}{\partial t} \right|^2.$$

En remplaçant $\widetilde{\mathbf{H}}_T^\eta$ par son expression, et en utilisant le fait que $|\widetilde{\mathbf{M}}^\eta| = |\mathbf{M}_0|$ (cf premier chapitre, propriétés d'un milieu ferromagnétique), on obtient :

$$\frac{\alpha}{\gamma |\mathbf{M}_0|} \left| \frac{\partial \widetilde{\mathbf{M}}^\eta}{\partial t} \right|^2 = \frac{\partial \widetilde{\mathbf{M}}^\eta}{\partial t} \cdot \varphi^\eta - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ |(\mathbf{M}_0 - \widetilde{\mathbf{M}}^\eta) \cdot \mathbf{n}|^2 + K_a |p \cdot \widetilde{\mathbf{M}}^\eta|^2 + |\mathbf{H}_s - \widetilde{\mathbf{M}}^\eta|^2 \right\}.$$

Ce qui montre que :

$$\mu_0 \int_0^1 \frac{\partial \widetilde{\mathbf{M}}^\eta}{\partial t} \cdot \varphi^\eta d\xi = \frac{d \mathcal{E}_f^\eta}{dt} + \frac{\mu_0}{\gamma} \int_0^1 \frac{\alpha}{|\mathbf{M}_0|} \left| \frac{\partial \widetilde{\mathbf{M}}^\eta}{\partial t} \right|^2 d\xi. \quad (2.31)$$

On obtient finalement (2.26) en regroupant (2.30) et (2.31).

Corollaire 2.1 *Pour tout $t > 0$:*

$$\mathcal{E}_v^\eta(t) + \eta \mathcal{E}_f^\eta(t) + \eta \mathcal{E}_r^\eta(t) \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega_v} \left(\varepsilon_0 |\mathbf{E}_0|^2 + \mu_0 |\mathbf{H}_0|^2 \right) dx$$

C'est en effet une conséquence immédiate du théorème (2.1) qui montre bien que la condition d'ordre 2 satisfait le critère de stabilité énoncé au chapitre 1.

2.3 Dérivation et étude de la stabilité de la condition d'ordre 4

2.3.1 Détermination d'une première condition d'ordre 4

Pour obtenir une condition équivalente d'ordre 4, nous utilisons donc l'approximation :

$$\begin{aligned} (\mathbf{E}^\eta, \mathbf{H}^\eta) &\approx (\overline{\mathbf{E}}^\eta, \overline{\mathbf{H}}^\eta) = (\mathbf{E}^0, \mathbf{H}^0) + \eta (\mathbf{E}^1, \mathbf{H}^1) + \eta^2 (\mathbf{E}^2, \mathbf{H}^2) + \eta^3 (\mathbf{E}^3, \mathbf{H}^3) \\ (\widehat{\mathbf{M}}^\eta, \widehat{\mathbf{H}}_T^\eta) &\approx (\overline{\mathbf{M}}^\eta, \overline{\mathbf{H}}_T^\eta) = (\widehat{\mathbf{M}}^0, \widehat{\mathbf{H}}_T^0) + \eta (\widehat{\mathbf{M}}^1, \widehat{\mathbf{H}}_T^1) + \eta^2 (\widehat{\mathbf{M}}^2, \widehat{\mathbf{H}}_T^2) \end{aligned}$$

On a alors :

$$\overline{\mathbf{E}}^\eta(0, t) \times \mathbf{n} = \left\{ \widehat{\mathbf{E}}^0 + \eta \widehat{\mathbf{E}}^1 + \eta^2 \widehat{\mathbf{E}}^2 + \eta^3 \widehat{\mathbf{E}}^3 \right\} (0, t) \times \mathbf{n}. \quad (2.32)$$

De la même manière que précédemment nous avons :

$$\mathbf{n} \times \left\{ \widehat{\mathbf{E}}^3(\xi, t) \times \mathbf{n} \right\} = \mu_0 \int_\xi^1 \frac{\partial}{\partial t} \left(\widehat{\mathbf{H}}^2(\zeta, t) + \widehat{\mathbf{M}}^2(\zeta, t) \right) \times \mathbf{n} d\zeta \quad (2.33)$$

D'autre part l'équation (2.6) montre que :

$$\left(\widehat{\mathbf{H}}^2(\xi, t) - \widehat{\mathbf{H}}^2(0, t) \right) \times \mathbf{n} = - \int_0^\xi \varepsilon(\zeta) \mathbf{n} \times \left\{ \widehat{\mathbf{E}}^1(\zeta, t) \times \mathbf{n} \right\} d\zeta$$

En dérivant (2.15) par rapport au temps, et en remplaçant dans l'équation ci-dessus, on obtient la relation suivante :

$$\widehat{\mathbf{H}}^2(\xi, t) \times \mathbf{n} = \mathbf{H}^2(0, t) \times \mathbf{n} - \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_0^\xi \varepsilon(\zeta) \left\{ (1 - \zeta) \mathbf{H}^0(0, t) + \int_\zeta^1 \widehat{\mathbf{M}}^0(\nu, t) d\nu \right\} \times \mathbf{n} d\zeta$$

que l'on peut écrire sous la forme suivante, en faisant une intégration par partie dans la seconde intégrale :

$$\widehat{\mathbf{H}}^2(\xi, t) \times \mathbf{n} = \left\{ \mathbf{H}^2(0, t) - \mu_0 \chi(\xi) \frac{\partial^2 \mathbf{H}^0}{\partial t^2}(0, t) - \mu_0 \int_0^1 \theta(\xi, \zeta) \frac{\partial^2 \widehat{\mathbf{M}}^0}{\partial t^2}(\zeta, t) d\zeta \right\} \times \mathbf{n} \quad (2.34)$$

On a posé dans ces équations : $\chi(\xi) = \int_0^\xi (1 - \zeta) \varepsilon(\zeta) d\zeta$ et $\theta(\xi, \zeta) = \int_0^{\min(\xi, \zeta)} \varepsilon(\nu) d\nu$

Nous déduisons finalement l'expression suivante de $\mathbf{n} \times \left\{ \widehat{\mathbf{E}}^3(\xi, t) \times \mathbf{n} \right\}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \times \left\{ \widehat{\mathbf{E}}^3(\xi, t) \times \mathbf{n} \right\} &= \mu_0 \left\{ (1 - \xi) \frac{\partial \mathbf{H}^2}{\partial t}(0, t) + \mu_0 \int_\xi^1 \frac{\partial \widehat{\mathbf{M}}^2}{\partial t}(\zeta, t) d\zeta \right\} \times \mathbf{n} \\ &- \mu_0^2 \int_\xi^1 \left\{ \chi(\zeta) \frac{\partial^2 \mathbf{H}^0}{\partial t^2}(0, t) + \int_0^1 \theta(\zeta, \nu) \frac{\partial^2 \widehat{\mathbf{M}}^0}{\partial t^2}(\nu, t) d\nu \right\} d\zeta \times \mathbf{n} \end{aligned} \quad (2.35)$$

En regroupant (2.35), (2.22), (2.15) et (2.11), nous constatons qu'on a la relation suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \times \left(\overline{\mathbf{E}}^\eta(0, t) \times \mathbf{n} \right) &= \mu_0 \eta \frac{\partial \overline{\mathbf{H}}^\eta}{\partial t}(0, t) \times \mathbf{n} + \mu_0 \eta \int_0^1 \frac{\partial \overline{\mathbf{M}}^\eta}{\partial t}(\xi, t) \times \mathbf{n} d\xi \\ &- \mu_0^2 \eta^3 \int_0^1 \chi(\xi) \left\{ \frac{\partial^3 \overline{\mathbf{H}}^\eta}{\partial t^3}(0, t) + \frac{\partial^3 \overline{\mathbf{M}}^\eta}{\partial t^3}(\xi, t) \right\} \times \mathbf{n} d\xi + O(\eta^4). \end{aligned} \quad (2.36)$$

On a utilisé le fait que : $\int_0^1 \theta(\xi, \zeta) d\zeta = \int_0^1 \theta(\zeta, \xi) d\zeta = \chi(\xi)$

Par ailleurs, en utilisant (2.34) et (2.18) on constate facilement que le champ $\overline{\mathbf{H}}_T^\eta$ vérifie :

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{H}}_T^\eta &= \mathbf{n} \times \left(\overline{\mathbf{H}}^\eta \times \mathbf{n} \right) + \left((\mathbf{M}_0 - \overline{\mathbf{M}}^\eta) \cdot \mathbf{n} \right) \mathbf{n} + \mathbf{H}_s + K_a(p \cdot \overline{\mathbf{M}}^\eta) p \\ &- \mu_0 \eta^2 \int_0^1 \theta(\xi, \zeta) \mathbf{n} \times \left\{ \frac{\partial^2 \overline{\mathbf{H}}^\eta}{\partial t^2}(0, t) \times \mathbf{n} + \frac{\partial^2 \overline{\mathbf{M}}^\eta}{\partial t^2}(\zeta, t) \times \mathbf{n} \right\} d\zeta + O(\eta^3) \end{aligned} \quad (2.37)$$

D'autre part, la remarque (2.3) montre que le moment magnétique $\overline{\mathbf{M}}^\eta$ est solution sur $(0, 1)$ de :

$$\frac{\partial \overline{\mathbf{M}}^\eta}{\partial t} = \gamma \overline{\mathbf{H}}_T^\eta \times \overline{\mathbf{M}}^\eta + \alpha \frac{\overline{\mathbf{M}}^\eta}{|\mathbf{M}_0|} \times \frac{\partial \overline{\mathbf{M}}^\eta}{\partial t} + O(\eta^3) \quad (2.38)$$

On a ainsi établi une condition aux limites équivalente qui détermine la valeur tangentielle de $\widehat{\mathbf{E}}^\eta$ au bord à η^4 près, en regroupant (2.36), (2.37) et (2.38) sans les termes correcteurs. On note par $(\widetilde{\mathbf{E}}^\eta, \widetilde{\mathbf{H}}^\eta, \widetilde{\mathbf{M}}^\eta, \widetilde{\mathbf{H}}_T^\eta)$ au lieu de $(\overline{\mathbf{E}}^\eta, \overline{\mathbf{H}}^\eta, \overline{\mathbf{M}}^\eta, \overline{\mathbf{H}}_T^\eta)$ les champs qui vérifient cette condition.

On peut l'écrire de manière compacte en introduisant $\tilde{\Psi}^\eta(\xi, t) = \widetilde{\mathbf{M}}^\eta(\xi, t) + \tilde{\mathbf{H}}^\eta(0, t)$, et en remarquant qu'on peut rajouter $\widetilde{\mathbf{M}}^\eta$ dans l'expression de $\tilde{\mathbf{H}}_T^\eta$ sans modifier les équations. Nous avons en effet :

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \times \left\{ \tilde{\mathbf{E}}^\eta(0, t) \times \mathbf{n} \right\} &= \mu_0 \eta \frac{\partial}{\partial t} \int_0^1 \tilde{\Psi}^\eta(\xi, t) \times \mathbf{n} - \mu_0 \eta^2 \chi(\xi) \frac{\partial^2 \tilde{\Psi}^\eta}{\partial t^2}(\xi, t) \times \mathbf{n} d\xi \\ \text{Avec } \tilde{\Psi}^\eta(\xi, t) &= \widetilde{\mathbf{M}}^\eta(\xi, t) + \tilde{\mathbf{H}}^\eta(0, t) \text{ et } \widetilde{\mathbf{M}}^\eta \text{ solution sur } (0, 1) \text{ de :} \\ \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \widetilde{\mathbf{M}}^\eta}{\partial t} &= \gamma \tilde{\mathbf{H}}_T^\eta \times \widetilde{\mathbf{M}}^\eta + \alpha \frac{\widetilde{\mathbf{M}}^\eta}{|\mathbf{M}_0|} \times \frac{\partial \widetilde{\mathbf{M}}^\eta}{\partial t} \\ \tilde{\mathbf{H}}_T^\eta(\xi, t) &= \mathbf{n} \times \left\{ \tilde{\Psi}^\eta(\xi, t) \times \mathbf{n} \right\} - \mu_0 \eta^2 \int_0^1 \theta(\xi, \zeta) \mathbf{n} \times \left\{ \frac{\partial^2 \tilde{\Psi}^\eta}{\partial t^2}(\zeta, t) \times \mathbf{n} \right\} d\zeta \\ &\quad + (\mathbf{M}_0(\xi) \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} + \mathbf{H}_s(\xi) + K_a(p \cdot \widetilde{\mathbf{M}}^\eta(\xi, t))p \end{aligned} \right. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Remarque 2.5 L'expression de la condition (2.39) est écrite pour le cas général où la permittivité ε est variable. C'est pour cela que l'on voit apparaître les fonctions "mystérieuse" : θ et χ . Dans le cas où ε est une constante ces fonctions sont tout simplement :

$$\left| \begin{aligned} \chi(\xi) &= \varepsilon \xi (1 - \tfrac{1}{2}\xi), \\ \theta(\xi, \zeta) &= \varepsilon \min(\xi, \zeta). \end{aligned} \right.$$

Cas particulier : $\mathbf{M}_0(\xi) = \text{constante}$

Dans ce cas particulier assez fréquent dans les applications pratiques, on peut établir une autre condition d'ordre 4 (qui diffère de la condition précédente par des termes en η^4). En effet, lorsque $\mathbf{M}_0(\xi) = \text{constante}$, le premier terme du développement asymptotique de $\widetilde{\mathbf{M}}$ est également indépendant de la variable ξ . Ceci provient du fait que $\mathbf{n} \times (\tilde{\mathbf{H}}^0 \times \mathbf{n})$ est lui même indépendant de ξ . Il est possible dans ce cas d'explicitier davantage l'expression de $\tilde{\mathbf{H}}^2$ donné par (2.34) en calculant l'intégrale qui fait intervenir $\widetilde{\mathbf{M}}_0$:

$$\tilde{\mathbf{H}}^2(\xi, t) \times \mathbf{n} = \left\{ \mathbf{H}^2(0, t) - \mu_0 \chi(\xi) \left(\frac{\partial^2 \mathbf{H}^0}{\partial t^2}(0, t) - \frac{d^2 \widetilde{\mathbf{M}}^0}{dt^2}(t) \right) \right\} \times \mathbf{n}$$

L'expression de $\tilde{\mathbf{H}}_T^\eta(\xi, t)$ s'écrit donc à des termes en η^3 près :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{H}}_T^\eta(\xi, t) &= \mathbf{n} \times \left\{ \tilde{\Psi}^\eta(\xi, t) \times \mathbf{n} \right\} - \mu_0 \eta^2 \chi(\xi) \mathbf{n} \times \left\{ \frac{\partial^2 \tilde{\Psi}^\eta}{\partial t^2}(\xi, t) \times \mathbf{n} \right\} \\ &\quad + (\mathbf{M}_0(\xi) \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} + \mathbf{H}_s(\xi) + K_a(p \cdot \widetilde{\mathbf{M}}^\eta(\xi, t))p \end{aligned} \quad (2.40)$$

On constate que dans ce cas particulier on s'est débarrassé de l'opérateur non local en espace qui intervenait dans l'expression de $\tilde{\mathbf{H}}_T^\eta(\xi, t)$. Cela peut être plus commode pour la mise en œuvre informatique.

2.3.2 Caractère instable de la condition d'ordre 4

Contrairement à la condition d'ordre 2 ou 3, on ne peut pas avoir le même type d'estimation de l'énergie lorsqu'on utilise la condition d'ordre 4. Nous allons démontrer ceci en s'intéressant à la condition linéaire qui en découle lorsque le moment magnétique initial est nul. Celle-ci s'avèrera fortement instable aux temps longs. Soit en effet le problème linéaire suivant :

Trouver $\tilde{\mathbf{E}}^\eta$ et $\tilde{\mathbf{H}}^\eta$ solutions sur $\Omega_v \times]0, +\infty[$ de :

$$\begin{cases} \varepsilon_0 \frac{\partial \tilde{\mathbf{E}}^\eta}{\partial t} - \text{rot } \tilde{\mathbf{H}}^\eta = 0, & \mu_0 \frac{\partial \tilde{\mathbf{H}}^\eta}{\partial t} + \text{rot } \tilde{\mathbf{E}}^\eta = 0, \\ (\tilde{\mathbf{E}}^\eta, \tilde{\mathbf{H}}^\eta)(x, 0) = (\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0)(x). \end{cases}$$

Et vérifiant la condition au bord issue de la condition (2.39) en prenant $\mathbf{M}_0(\xi) = 0$:

$$\mathbf{n} \times \left\{ \tilde{\mathbf{E}}^\eta(0, t) \times \mathbf{n} \right\} - \mu_0 \eta \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \tilde{\mathbf{H}}^\eta(0, t) - \mu_0 \tilde{\chi} \eta^2 \frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{H}}^\eta}{\partial t^2}(0, t) \right\} \times \mathbf{n} = g(t)$$

où g est une fonction régulière du temps et $\tilde{\chi}$ désigne la moyenne sur $(0, 1)$ de χ . On remarque que les composantes selon x des deux champs sont nulles, et que $(\tilde{\mathbf{E}}_y^\eta, \tilde{\mathbf{H}}_z^\eta)$ et $(\tilde{\mathbf{E}}_z^\eta, -\tilde{\mathbf{H}}_y^\eta)$ vérifient les mêmes type de problèmes.

L'étude de stabilité du problème précédent se ramène en fait à l'étude du problème (\mathcal{P}) suivant.

\mathcal{P} : Trouver \mathbf{E} et \mathbf{H} solutions sur $\Omega_v \times]0, \infty[$ de :

$$\begin{cases} \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial x} = 0, & \mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} = 0, \\ (\mathbf{E}, \mathbf{H})(x, 0) = (\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0)(x). \end{cases} \quad (2.41)$$

Et vérifiant la condition au bord :

$$\mathbf{E}(0, t) - \mu_0 \eta \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \mathbf{H}(0, t) - \mu_0 \tilde{\chi} \eta^2 \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}(0, t) \right\} = g(t)$$

On pose dans toute la suite : $\nu = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$, ainsi \mathbf{E} et $\nu \mathbf{H}$ désignent deux quantités homogènes.

Définition 2.1 *On dit que le problème \mathcal{P} est fortement mal posé, si on ne peut pas estimer norme $L^2(\Omega_v)$ de la solution en fonction des normes de Sobolev des données de manière uniforme en η quand $\eta \rightarrow 0$, i.e. si :*

$$\forall s > 0 \quad \liminf_{\eta \rightarrow 0} \sup_{(\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0) \in H^s} \sup_{t \leq T} \left(\frac{\|\mathbf{E}(t)\|_{L^2(\Omega_v)} + \|\nu \mathbf{H}(t)\|_{L^2(\Omega_v)}}{\|\mathbf{E}_0\|_{H^s(\Omega_v)} + \|\nu \mathbf{H}_0\|_{H^s(\Omega_v)}} \right) = \infty \quad (2.42)$$

Théorème 2.2 *Le problème \mathcal{P} est fortement mal posé.*

Preuve: Nous démontrons ce résultat en exhibant un exemple de solutions particulière. Cherchons pour cela des solutions régulières en temps pour lesquelles on peut définir la transformée de Fourier-Laplace en temps :

$$\widehat{E}(x, s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} E(x, t) dt, \quad (2.43)$$

pour tout nombre complexe $s = \lambda + i\omega$ tel que $\lambda > \lambda_0 > 0$. Les deux premières équations du problème \mathcal{P} s'écrivent alors :

$$\varepsilon_0 s \widehat{E} + \frac{\partial \widehat{H}}{\partial x} = 0, \quad \mu_0 s \widehat{H} + \frac{\partial \widehat{E}}{\partial x} = 0$$

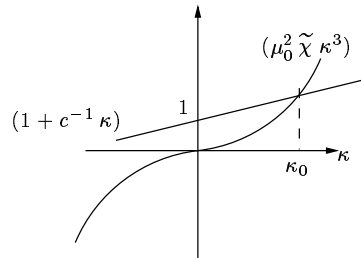
les solutions dans $L^2(\Omega_v)$ de ce problèmes sont de la forme :

$$(\widehat{E}, \nu \widehat{H}) = A(s) e^{sx/c} (1, -1), \quad (2.44)$$

où $A(s)$ est une fonction à valeurs complexe et $c = (\varepsilon_0 \mu_0)^{-\frac{1}{2}}$. Une telle solution doit vérifier également la condition aux bord $x = 0$, ce qui nous impose la relation suivante :

$$P(s) \cdot A(s) = \widehat{g}(s) \quad (2.45)$$

avec $P(s) = 1 + c^{-1} \eta s (1 - \mu_0 \tilde{\chi} \eta^2 s^2)$. Le polynôme P admet une unique solution réelle λ_0 strictement positive. En effet, soit $\kappa = \eta s$, alors $P(s) = 0$ ssi $1 + c^{-1} \kappa = \mu_0^2 \tilde{\chi} \kappa^3$: équation qui admet une seule solution réelle $\kappa = \kappa_0 > 0$, indépendante de η .



Cela prouve que la transformé de Fourier-Laplace n'est pas inversible pour $Re(s) < \eta^{-1} \kappa_0$ et montre l'existence d'une onde plane exponentiellement croissante en temps solution de la condition équivalente avec $g = 0$. Du fait que la racine de $P(s)$ est en η^{-1} nous permet même d'exhiber des solutions qui explose exponentiellement quand $\eta \rightarrow 0$. Soit en effet les données suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} (E_0, \nu H_0) = \sqrt{\frac{2\kappa_0}{\eta c}} e^{\eta^{-1} \kappa_0 (x/c)} (1, -1), \\ g = 0. \end{array} \right.$$

pour lesquelles il est facile de vérifier que :

$$(E, \nu H) = \sqrt{\frac{2\kappa_0}{\eta c}} e^{\eta^{-1} \kappa_0 (t+x/c)} (1, -1),$$

sont solutions de \mathcal{P} . On a d'une part :

$$\|E_0\|_{L^2(\Omega_v)} = \|\nu H_0\|_{L^2(\Omega_v)} = 1 \text{ et } \|E_0\|_{H^s(\Omega_v)} = \|\nu H_0\|_{H^s(\Omega_v)} \sim \eta^{-s}, \quad \forall s > 0.$$

et d'autre part :

$$\|E(t)\|_{L^2(\Omega_v)} = \|\nu H(t)\|_{L^2(\Omega_v)} = e^{\eta^{-1}\kappa_0 t}.$$

On constate alors de manière évidente que cette solution n'admet pas les propriétés de stabilité requise selon la définition (2.1).

Remarque 2.6 *Ce résultat ne remet pas en cause l'existence d'un développement asymptotique au delà de l'ordre 4. Il indique plutôt que la dernière étape de notre démarche formelle consistant à rajouter des termes d'ordre η^4 n'est pas valide. Nous envisagerons dans le paragraphe suivant une alternative pour remédier à ce défaut.*

2.3.3 Nouvelle condition d'ordre 4

Considérons toujours le problème linéaire (2.41) avec la condition aux limites suivante en $x = 0$:

$$E(0, t) - \mu_0 \eta \frac{\partial}{\partial t} \{ \mathcal{A}^\eta(H(0, t)) \} = 0$$

où \mathcal{A}^η désigne un certain opérateur linéaire en temps. La condition équivalent d'ordre 2 correspond à :

$$\mathcal{A}^\eta = \mathcal{A}_2^\eta = I,$$

et la condition équivalente d'ordre 4 correspond à :

$$\mathcal{A}^\eta = \mathcal{A}_4^\eta = I - \mu_0 \tilde{\chi} \eta^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2}.$$

La condition d'ordre 4 apparaît donc comme une perturbation en η^2 de la condition d'ordre 2 mais qui est instable aux temps long. L'idée pour surmonter cette difficulté est de remplacer \mathcal{A}_4^η par une autre perturbation du même ordre en η en utilisant un développement de Padé. On écrit en fait que :

$$\mathcal{A}_4^\eta \approx \left(I + \mu_0 \tilde{\chi} \eta^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right)^{-1}. \quad (2.46)$$

Cette technique est similaire à celle utilisé par [3] pour les conditions aux limites absorbantes (voir aussi [4]). Nous allons démontrer que nous aboutirons ainsi à une nouvelle condition d'ordre 4 qui admet les bonnes propriétés de stabilité. Ce résultat sera démontré directement dans le cas non linéaire. Mais on peut le constater déjà sur le problème linéaire en remarquant que la relation (2.45) fait intervenir dans le cas de (2.46) la fraction rationnelle P :

$$P(s) = 1 + \frac{\mu_0 \eta s}{1 + \mu_0 \tilde{\chi} \eta^2 s^2}.$$

P s'annule ssi $\kappa = \eta s$ est solution de $\mu_0 \tilde{\chi} \kappa^2 + \mu_0 \kappa + 1 = 0$. Ce polynôme ne s'annule pas pour les κ réels positifs, et si ses racines sont complexes leur parties réelles valent chacune $-(2\tilde{\chi})^{-1} < 0$. Ceci montre l'absence de solutions exponentiellement croissante en temps et que le problème est fortement bien posé au sens de Kreiss [10].

Intéressons nous maintenant au problème non linéaire et commençons par écrire la nouvelle condition issue de (2.39) en appliquant ces idées. En fait (2.39) peut être écrite sous la forme :

$$\mathbf{n} \times \left\{ \tilde{\mathbf{E}}^\eta(0, t) \times \mathbf{n} \right\} = \mu_0 \eta \frac{\partial}{\partial t} \int_0^1 \mathcal{A}^\eta(\tilde{\Psi}^\eta \times \mathbf{n})(\xi, t) d\xi,$$

$$\tilde{\mathbf{H}}_T^\eta(\xi, t) = \mathbf{n} \times \mathcal{A}^\eta(\tilde{\Psi}^\eta)(\xi, t) + (\mathbf{M}_0(\xi) \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} + \mathbf{H}_s(\xi) + K_a(p \cdot \tilde{\mathbf{M}}^\eta(\xi, t))p$$

où \mathcal{A}^η est un opérateur linéaire en temps et en espace, qui à toute fonction Ψ définie sur $]0, 1[\times]0, +\infty[$ associe la fonction $\mathcal{A}^\eta(\Psi)$ définie sur $]0, 1[\times]0, +\infty[$ par :

$$\mathcal{A}^\eta(\Psi)(\xi, t) = \Psi(\xi, t) - \mu_0 \eta^2 \int_0^1 \theta(\xi, \zeta) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}(\zeta, t) d\zeta.$$

En appliquant la même technique que dans (2.46), nous déduisons la relation suivante vérifiée à des termes en η^4 près :

$$[\mathcal{A}^\eta]^{-1}(\Psi)(\xi, t) \approx \Psi(\xi, t) + \mu_0 \eta^2 \int_0^1 \theta(\xi, \zeta) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}(\zeta, t) d\zeta.$$

Soit $\tilde{\Phi}^\eta$ telle que $[\mathcal{A}^\eta]^{-1}(\tilde{\Phi}^\eta) = \mathbf{n}(\tilde{\Psi}^\eta \times \mathbf{n})$, on a alors $\mathcal{A}^\eta(\tilde{\Psi}^\eta \times \mathbf{n}) = \tilde{\Phi}^\eta \times \mathbf{n}$. Cela nous permet d'écrire la nouvelle condition d'ordre 4 sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \times \left\{ \tilde{\mathbf{E}}^\eta(0, t) \times \mathbf{n} \right\} &= \mu_0 \eta \frac{\partial}{\partial t} \int_0^1 \tilde{\Phi}^\eta(\xi, t) \times \mathbf{n} d\xi, \\ \text{avec } \tilde{\Phi}^\eta(\xi, t) &\text{ solution pour tout } \xi \in]0, 1[\text{ de :} \\ \tilde{\Phi}^\eta(\xi, t) + \mu_0 \eta^2 \int_0^1 \theta(\xi, \zeta) \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}^\eta}{\partial t^2}(\zeta, t) d\zeta &= \mathbf{n} \times \left\{ (\tilde{\mathbf{H}}^\eta(0, t) + \tilde{\mathbf{M}}^\eta(\xi, t)) \times \mathbf{n} \right\}, \\ \text{et } \tilde{\mathbf{M}}^\eta &\text{ solution pour tout } \xi \in]0, 1[\text{ de :} \\ \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\mathbf{M}}^\eta}{\partial t} &= \gamma \tilde{\mathbf{H}}_T^\eta \times \tilde{\mathbf{M}}^\eta + \alpha \frac{\tilde{\mathbf{M}}^\eta}{|\mathbf{M}_0|} \times \frac{\partial \tilde{\mathbf{M}}^\eta}{\partial t} \\ \tilde{\mathbf{H}}_T^\eta(\xi, t) &= \mathbf{n} \times \left\{ \tilde{\Phi}^\eta(\xi, t) \times \mathbf{n} \right\} + (\mathbf{M}_0(\xi) \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} + \mathbf{H}_s(\xi) + K_a(p \cdot \tilde{\mathbf{M}}^\eta(\xi, t))p \end{aligned} \right. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Ces deux dernières équations sont à compléter par les conditions initiales :

$$\tilde{\mathbf{M}}^\eta(\xi, 0) = \mathbf{M}_0(\xi), \quad \tilde{\Phi}^\eta(\xi, 0) = \mathbf{n} \times (\mathbf{M}_0(\xi) \times \mathbf{n}), \quad \text{et} \quad \frac{\partial \tilde{\Phi}^\eta}{\partial t}(\xi, 0) = 0. \quad (2.48)$$

Nous énonçons maintenant le théorème concernant la stabilité de cette condition :

Théorème 2.3 *Soit $(\tilde{\mathbf{E}}^\eta, \tilde{\mathbf{H}}^\eta)$ une solution suffisamment régulière des équations de Maxwell (2.9) couplées avec la condition d'ordre 4 donnée par (2.47). L'identité (2.26) est encore vérifiée avec :*

$$\mathcal{E}_\Gamma^\eta(t) = \frac{\mu_0}{2} \int_0^1 \left\{ \left| \tilde{\Phi}^\eta - \mathbf{n} \times (\tilde{\mathbf{M}}^\eta \times \mathbf{n}) \right|^2 + \eta^2 \mu_0 \int_0^1 \theta(\xi, \zeta) \left| \frac{\partial \tilde{\Phi}^\eta}{\partial t}(\zeta, t) \right|^2 d\zeta \right\} d\xi.$$

Preuve : Reprenons l'identité (2.28) qui est toujours valable. En remplaçant $\tilde{\mathbf{E}}^\eta$ par son expression dans la condition aux limites (2.47), on obtient :

$$\frac{d \mathcal{E}_v^\eta}{dt}(t) + \mu_0 \eta \int_0^1 \frac{\partial \tilde{\Phi}^\eta}{\partial t} \cdot \varphi^\eta d\xi = 0 \quad (2.49)$$

Remarquons que : $\tilde{\Phi}^\eta = \mathbf{n} \times (\tilde{\Phi}^\eta \times \mathbf{n})$ et $\varphi^\eta = \mathbf{n} \times (\tilde{\mathbf{H}}^\eta(0, t) \times \mathbf{n})$. De l'équation différentielle (2.47) vérifiée par $\tilde{\Phi}^\eta$ on tire l'expression de φ^η et on l'injecte dans (2.49). Ceci nous donne l'égalité suivante :

$$\frac{d\mathcal{E}_v^\eta}{dt}(t) + \eta \frac{\mu_0}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 \left\{ |\tilde{\Phi}^\eta|^2 + \eta^2 \mu_0 \int_0^1 \theta(\xi, \zeta) \left| \frac{\partial \tilde{\Phi}^\eta}{\partial t}(\zeta, t) \right|^2 d\zeta \right\} d\xi - \eta \mu_0 \int_0^1 \frac{\partial \tilde{\Phi}^\eta}{\partial t} \cdot \widetilde{\mathbf{M}}^\eta d\xi = 0 \quad (2.50)$$

D'autre part, on peut écrire que :

$$-\frac{\partial \tilde{\Phi}^\eta}{\partial t} \cdot \widetilde{\mathbf{M}}^\eta = -\frac{\partial}{\partial t} (\tilde{\Phi}^\eta \cdot \widetilde{\mathbf{M}}^\eta) + \frac{\partial \widetilde{\mathbf{M}}^\eta}{\partial t} \cdot \tilde{\Phi}^\eta,$$

Comme $\frac{\partial}{\partial t} |\widetilde{\mathbf{M}}^\eta|^2 = 0$, nous avons :

$$-\frac{\partial \tilde{\Phi}^\eta}{\partial t} \cdot \widetilde{\mathbf{M}}^\eta + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} |\tilde{\Phi}^\eta|^2 = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} |\tilde{\Phi}^\eta - \mathbf{n} \times (\widetilde{\mathbf{M}}^\eta \times \mathbf{n})|^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} |\widetilde{\mathbf{M}}^\eta \cdot \mathbf{n}|^2 + \frac{\partial \widetilde{\mathbf{M}}^\eta}{\partial t} \cdot \tilde{\Phi}^\eta.$$

Nous obtenons ainsi en remplaçant dans (2.49) la relation suivante :

$$\frac{d}{dt} \{ \mathcal{E}_v^\eta(t) + \eta \mathcal{E}_\Gamma^\eta(t) \} + \eta \mu_0 \int_0^1 \frac{\partial \widetilde{\mathbf{M}}^\eta}{\partial t} \cdot \phi^\eta d\xi = 0, \quad (2.51)$$

où on a posé $\phi^\eta = \tilde{\Phi}^\eta + (\widetilde{\mathbf{M}}^\eta \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}$.

Nous sommes maintenant dans la même situation que (2.30) puisque $\widetilde{\mathbf{M}}^\eta$ est solution de l'équation de Landau-Lifchitz-Gilbert, avec :

$$\tilde{\mathbf{H}}_T^\eta = \phi^\eta + \left((\mathbf{M}_0 - \widetilde{\mathbf{M}}^\eta) \cdot \mathbf{n} \right) \mathbf{n} + \mathbf{H}_s + K_a(p \cdot \widetilde{\mathbf{M}}^\eta)p.$$

Le même calcul entrepris pour le traitement (2.30) s'applique ici et nous permet alors de conclure.

Le corollaire (2.1) est aussi une conséquence immédiate du théorème (2.3) et montre bien le caractère uniformément L^2 stable de la nouvelle condition aux limites.

Chapitre 3

Analyse numérique

Nous présentons dans ce chapitre l'étude numérique du problème monodimensionnel. Cette étude s'intéresse plus particulièrement au traitement des nouvelles conditions aux limites (conditions d'ordre 3 et d'ordre 4) et à la stabilité des différents schémas numériques proposés. La résolution numérique explicite de l'équation de Landau-Lifschitz-Gilbert est traitée dans [6] et [7] et ne sera pas discutée dans ce qui suit.

3.1 Formulation variationnelle du modèle continu

Pour la résolution numérique nous allons travailler sur un domaine borné. Le domaine Ω_v est désormais égal à $]x_0, 0[$, où $x_0 = -L$ et L désigne la longueur du domaine. La couche ferromagnétique occupe l'intervalle $]0, \eta[$. On utilisera en x_0 une condition de Dirichlet réfléchissante.

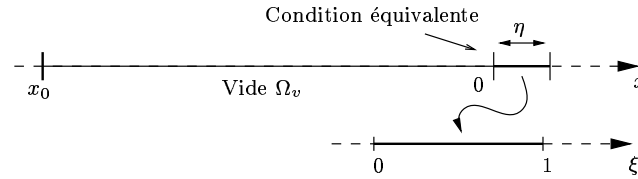


FIG. 3.1 – *Le cas monodimensionnel*

On considère donc (\mathbf{E}, \mathbf{H}) solutions du système suivant (on n'utilise plus, par commodité, la notation $(\tilde{\mathbf{E}}^\eta, \tilde{\mathbf{H}}^\eta)$)

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \text{rot } \mathbf{H} = 0, \quad \mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \text{rot } \mathbf{E} = 0, \quad \text{sur }]x_0, 0[\times]0, +\infty[\\ (\mathbf{E}, \mathbf{H})(x, 0) = (\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0)(x), \\ \mathcal{B}(\mathbf{E} \times \mathbf{n}, \mathbf{H} \times \mathbf{n})(0, t) = 0 \\ \mathbf{E}(x_0, t) \times \mathbf{n} = 0 \end{array} \right. \quad (3.1)$$

La condition $\mathcal{B}(\mathbf{E} \times \mathbf{n}, \mathbf{H} \times \mathbf{n})(0, t) = 0$ désigne une des conditions équivalentes (2.19) et (2.47). Nous allons commencer par écrire une formulation faible en espace de nos équations.

Introduisons pour cela l'espace \mathcal{H}_{rot}^0 défini par :

$$\mathcal{H}_{rot}^0 = \{\psi \in L^2(\Omega_v)^3 / \text{rot}(\psi) \in L^2(\Omega_v)^3 \text{ et } (\psi \times \mathbf{n})(x_0) = 0\},$$

et le vecteur tangentiel φ :

$$\varphi(t) = \mathbf{n} \times (\mathbf{H}(0, t) \times \mathbf{n}) = (0, H_y, H_z).$$

La formulation faible adoptée pour notre problème est alors la suivante :

Chercher $(\mathbf{H}, \mathbf{E}, \varphi) \in L^2(\Omega_v)^3 \times \mathcal{H}_{rot}^0 \times \mathbb{R}^3$ tels que :

$$\begin{array}{ll} (i) & \int_{\Omega_v} \mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \cdot \mathbf{H}' + \text{rot} \mathbf{E} \cdot \mathbf{H}' dx = 0 \quad \forall \mathbf{H}' \in L^2(\Omega_v)^3, \\ (ii) & \int_{\Omega_v} \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot \mathbf{E}' + \text{rot} \mathbf{E}' \cdot \mathbf{H} dx + (\varphi \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{E}'(0) = 0 \quad \forall \mathbf{E}' \in \mathcal{H}_{rot}^0, \\ (iii) & \mathcal{B}(\mathbf{E} \times \mathbf{n}, \varphi \times \mathbf{n})(0, t) = 0. \end{array} \quad (3.2)$$

Elle est obtenue en multipliant les deux premières équations de (3.1) respectivement par \mathbf{E}' et \mathbf{H}' et en faisant une intégration par partie pour obtenir (3.2)(ii). Cette formulation conduit en l'absence de la condition équivalente au schéma standard de Yee [15], ce qui fait l'objet du paragraphe suivant. Remarquons simplement que les solutions du système (3.1) sont telles que :

$$(E_x, H_x)(x, t) = (E_{0x}, H_{0x})(x). \quad (3.3)$$

Ainsi on peut faire l'économie du calcul de ces composantes longitudinales. On supposera désormais que : $(E_{0x}, H_{0x})(x) = (0, 0)$.

3.1.1 Semi discrétisation en espace des équations à l'intérieur de Ω_v

Dans un premier temps on considère $\varphi(t)$ comme une donnée.

Soit un découpage régulier de pas h du domaine Ω_v , et soit N le nombre de mailles : $N h = L$.

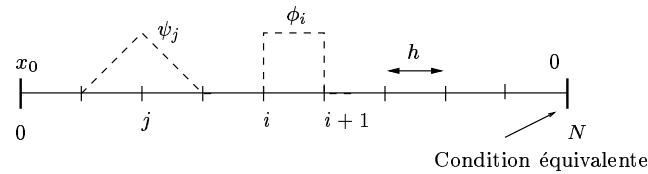


FIG. 3.2 – Maillage du domaine

Soit $P_1(\Omega_v)$ l'espace des fonctions scalaires continues, linéaires par maille et nulles en x_0 . Soit $\{\psi_i\}_{i=1}^{i=N}$ la base canonique de $P_1(\Omega_v)$; elle comporte N éléments et nous permet de définir le champ électrique discret \mathbf{E}_h comme suit :

$$\mathbf{E}_h = \sum_{i=1}^N E_y(i) \psi_i(x) \mathbf{e}_y + E_z(i) \psi_i(x) \mathbf{e}_z, \quad (3.4)$$

où $E_y(i)$ et $E_z(i)$ sont les degrés de liberté.

Soit de même $P_0(\Omega_v)$ l'espace des fonctions scalaires constantes par maille. Soit $\{\phi_i\}_{i=1}^{i=N}$ la base canonique de $P_0(\Omega_v)$; elle comporte également N éléments et nous permet de définir le champ électrique discret \mathbf{H}_h par :

$$\mathbf{H}_h = \sum_{i=1}^N H_y(i - \frac{1}{2}) \phi_i(x) \mathbf{e}_y + H_z(i - \frac{1}{2}) \phi_i(x) \mathbf{e}_z, \quad (3.5)$$

Les degrés de liberté étant $H_y(i - \frac{1}{2})$ et $H_z(i - \frac{1}{2})$.

On note :

$$V_h(\Omega_v) = \{0\} \times P_1(\Omega_v) \times P_1(\Omega_v), \text{ et } X_h(\Omega_v) = \{0\} \times P_0(\Omega_v) \times P_0(\Omega_v).$$

Il est à présent possible d'écrire une formulation semi-discrète de la formulation (3.2) en remplaçant les espaces fonctionnels \mathcal{H}_{rot}^0 et $L^2(\Omega_v)^3$ par leurs espaces d'approximations respectifs $V_h(\Omega_v)$ et $X_h(\Omega_v)$.

Par ailleurs, il est commode, pour la mise en œuvre informatique, d'avoir une "matrice de masse" diagonale. C'est pourquoi nous utilisons la condensation de masse dans le calcul de l'intégrale d'un produit de deux fonctions de $V_h(\Omega_v)$. Cela consiste à utiliser une formule de quadrature de type Gauss-Lobatto qui intègre exactement les polynômes de degrés inférieurs à un. Ainsi pour une fonction f définie sur $]x_0, 0[$, on approche son intégrale sur un pas du maillage par :

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f dx \approx \frac{h}{2} (f(x_{i+1}) + f(x_i)). \quad (x_i = i h)$$

Soit f_1 et f_2 deux éléments de V_h , nous rappelons que le produit \langle, \rangle défini par :

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{h}{2} (f_1(x_{i+1})f_2(x_{i+1}) + f_1(x_i)f_2(x_i))$$

est un produit scalaire sur V_h dont la norme associée est équivalente uniformément en h à la norme L^2 .

On note (par abus de notation) de la même façon $(\mathbf{H}_h, \mathbf{E}_h) \in (X_h \times V_h)$ la nouvelle solution du problème variationnel avec condensation de masse. Ils vérifient le système suivant :

$$\begin{cases} (i) & \mu_0 \left(\frac{\partial \mathbf{H}_h}{\partial t}, \phi_h \right) + (\text{rot } \mathbf{E}_h, \phi_h) = 0 & \forall \phi_h \in X_h, \\ (ii) & \varepsilon_0 \left\langle \frac{\partial \mathbf{E}_h}{\partial t}, \psi_h \right\rangle - (\text{rot } \psi_h, \mathbf{H}_h) + (\varphi \times \mathbf{n}) \cdot \psi_h(0) = 0 & \forall \psi_h \in V_h. \end{cases} \quad (3.6)$$

Ces équations peuvent également s'exprimer sous la forme d'un système d'équations scalaires en choisissant comme fonctions tests les vecteurs de la base canonique des différents espaces. On obtient en effet (en omettant l'indice h par simplicité d'écriture) :

Pour $1 \leq i \leq N$:

$$\mu_0 \frac{dH_y}{dt}(i - \frac{1}{2}) = \frac{E_z(i) - E_z(i-1)}{h}; \quad \mu_0 \frac{dH_z}{dt}(i - \frac{1}{2}) = -\frac{E_y(i) - E_y(i-1)}{h}. \quad (3.7)$$

Pour $1 \leq i \leq N - 1$:

$$\varepsilon_0 \frac{dE_y}{dt}(i) = -\frac{H_z(i + \frac{1}{2}) - H_z(i - \frac{1}{2})}{h}; \quad \varepsilon_0 \frac{dE_z}{dt}(i) = \frac{H_y(i + \frac{1}{2}) - H_y(i - \frac{1}{2})}{h}. \quad (3.8)$$

Pour $i = N$:

$$\varepsilon_0 \frac{dE_y}{dt}(N) = -\frac{2}{h} \left(\varphi_z - H_z(N - \frac{1}{2}) \right); \quad \varepsilon_0 \frac{dE_z}{dt}(N) = \frac{2}{h} \left(\varphi_y - H_y(N - \frac{1}{2}) \right). \quad (3.9)$$

Bien entendu, il convient d'associer à ces équations les conditions initiales $(\mathbf{E}_{0h}, \mathbf{H}_{0h}) \in X_h \times V_h$.

3.1.2 Traitement des conditions équivalentes

Hormis le cas particulier de la condition équivalente d'ordre 2 lorsque la distribution initiale du moment magnétique est constante, auquel cas le moment magnétique reste lui même constant, l'opérateur \mathcal{B} fait intervenir des champs qui dépendent de la variable ξ et qui nécessitent donc le choix d'un espace d'approximation. Nous remarquons l'absence d'opérateur de dérivation spatiale qui intervient dans \mathcal{B} . Le choix naturel consiste, dans ce cas, à prendre les fonctions tests dans $X_k(0, 1)$ où k désigne le pas de discrétisation de $]0, 1[$. Ce choix a aussi l'avantage de préserver constante la norme du moment magnétique, propriété très importante dans l'étude de stabilité aussi bien du modèle continu que du modèle discret. Nous adoptons ainsi le même choix que dans [7] pour l'étude des équations du ferromagnétisme.

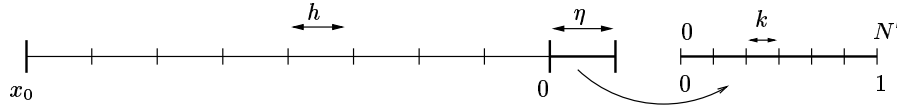


FIG. 3.3 – *Discrétisation du milieu ferromagnétique*

Notons par $X_k(0, 1) = P_0^k(0, 1)^3$ l'espace d'approximation associé à $L^2(0, 1)$ et soit $\{\phi_i\}_{i=1}^{N'}$ la base canonique associée à $P_0^k(0, 1)$. Elle comporte N' éléments et nous permet de définir le champ magnétique discret $\mathbf{M}_k \in X_k(0, 1)$ par :

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_k &= \sum_{i=1}^{N'} M_x(i - \frac{1}{2}) \phi_i(x) \mathbf{e}_x + M_y(i - \frac{1}{2}) \phi_i(x) \mathbf{e}_y + M_z(i - \frac{1}{2}) \phi_i(x) \mathbf{e}_z \\ &= \sum_{i=1}^{N'} \phi_i(x) \mathbf{M}_k(i - \frac{1}{2}), \end{aligned}$$

où $M_x(i - \frac{1}{2})$, $M_y(i - \frac{1}{2})$ et $M_z(i - \frac{1}{2})$ désignent les degrés de liberté.

On notera par \mathbf{M}_{0k} , \mathbf{H}_{sk} et p_k les projetés respectifs de \mathbf{M}_0 , \mathbf{H}_s et p sur $X_k(0, 1)$ et par α_k et K_{ak} les projetés respectifs de α et K_a sur $P_0^k(0, 1)$.

Approximation spatiale de la condition d'ordre 2

La condition d'ordre 2 donnée par (2.19) s'écrit sous forme discrétisée comme suit :

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_h(0) \times \mathbf{n}) = \eta \mu_0 \frac{d\varphi}{dt} \times \mathbf{n} + \eta \mu_0 \overline{\mathbf{M}}_k \times \mathbf{n}. \quad (3.10)$$

avec $\overline{\mathbf{M}}_k = \int_0^1 \mathbf{M}_k d\xi = \sum_{i=1}^{N'} k \mathbf{M}_k(i - \frac{1}{2})$, la fonction \mathbf{M}_k étant solution de :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathbf{M}_k}{\partial t} = \gamma \mathbf{H}_{Tk} \times \mathbf{M}_k + \alpha_k \frac{\mathbf{M}_k}{|\mathbf{M}_{0k}|} \times \frac{\partial \mathbf{M}_k}{\partial t} \\ \mathbf{H}_{Tk} = \varphi + \mathbf{H}_{sk} + K_{ak}(p_k \cdot \mathbf{M}_k)p_k + ((\mathbf{M}_{0k} - \mathbf{M}_k) \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} \end{array} \right. \quad (3.11)$$

Remarque 3.1 *Du fait que \mathbf{M}_k et \mathbf{H}_{Tk} sont tout deux dans $X_k(0, 1)$ et que le produit vectoriel est local en espace, l'équation (3.11) n'est autre qu'un système de N' équations découplées les une des autres et qui portent sur les degrés de liberté par maille. L'équation (3.11) s'écrit en effet : pour tout $1 \leq i \leq N'$*

$$\frac{d}{dt} \mathbf{M}_k(i - \frac{1}{2}) = \gamma \mathbf{H}_{Tk}(i - \frac{1}{2}) \times \mathbf{M}_k(i - \frac{1}{2}) + \alpha_k(i - \frac{1}{2}) \frac{\mathbf{M}_k}{|\mathbf{M}_{0k}|}(i - \frac{1}{2}) \times \frac{d}{dt} \mathbf{M}_k(i - \frac{1}{2}) \quad (3.12)$$

Approximation spatiale de la condition d'ordre 4

La condition d'ordre 4 donnée par (2.47), nécessite en plus la discrétisation de la variable auxiliaire $\tilde{\Phi}^\eta$. Introduisons pour cela $\Phi_k \in P_0^k(0, 1)^2$

$$\begin{aligned} \Phi_k &= \sum_{i=1}^{N'} \Phi_y(i - \frac{1}{2}) \phi_i(x) \mathbf{e}_y + \Phi_z(i - \frac{1}{2}) \phi_i(x) \mathbf{e}_z, \\ &= \sum_{i=1}^{N'} \phi_i(x) \Phi_k(i - \frac{1}{2}). \end{aligned}$$

La condition d'ordre 4 fait intervenir la fonction $\theta(\xi, \zeta) = \int_0^{\min(\xi, \zeta)} \varepsilon(\nu) d\nu$. Nous désignerons par θ_k son approximation numérique. On peut envisager par exemple le choix suivant pour θ_k :

$$\theta_k(\xi, \zeta) = \sum_{i=1}^{N'} \sum_{j=1}^{N'} \phi_i(\xi) \phi_j(\zeta) \theta_k(i - \frac{1}{2}, j - \frac{1}{2}); \quad \text{avec : } \theta_k(i - \frac{1}{2}, j - \frac{1}{2}) = \sum_{l=1}^{\min(i, j)} k \varepsilon(k(l - \frac{1}{2})). \quad (3.13)$$

La condition d'ordre 4 discrète que nous proposons s'écrit :

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_h(0) \times \mathbf{n}) = \eta \mu_0 \int_0^1 \frac{\partial \Phi_k}{\partial t} \times \mathbf{n} d\xi \quad (3.14)$$

avec Φ_k solution de :

$$\Phi_k + \mu_0 \eta^2 \int_0^1 \theta_k(\xi, \zeta) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Phi_k(\zeta) d\zeta = \varphi + \mathbf{n} \times (\mathbf{M}_k \times \mathbf{n}) \quad (3.15)$$

et \mathbf{M}_k solution de :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathbf{M}_k}{\partial t} = \gamma \mathbf{H}_{Tk} \times \mathbf{M}_k + \alpha_k \frac{\mathbf{M}_k}{|\mathbf{M}_{0k}|} \times \frac{\partial \mathbf{M}_k}{\partial t} \\ \mathbf{H}_{Tk} = \Phi_k + \mathbf{H}_{sk} + K_{ak}(p_k \cdot \mathbf{M}_k)p_k + ((\mathbf{M}_{0k} - \mathbf{M}_k) \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} \end{array} \right. \quad (3.16)$$

Remarque 3.2 Bien entendu, la remarque 3.1 reste valable pour l'équation (3.16). Cependant l'équation (3.15) introduit bien un couplage entre les différents degrés de libertés de Φ_k à cause de l'intégrale qui intervient dans son expression. Elle s'écrit en effet point par point :

$$\Phi_k(i - \frac{1}{2}) + \mu_0 \eta^2 \sum_{j=1}^{N'} k \theta_k(i - \frac{1}{2}, j - \frac{1}{2}) \frac{d^2}{dt^2} \Phi_k(j - \frac{1}{2}) = \varphi(i - \frac{1}{2}) + \mathbf{n} \times (\mathbf{M}_k(i - \frac{1}{2}) \times \mathbf{n}) \quad (3.17)$$

3.2 Discrétisation en temps

Nous allons proposer deux schémas de discrétisation possibles de la condition équivalente d'ordre 2 qui amènent à des conditions de stabilité différentes. Nous en déduisons la meilleure alternative qui sera appliquée également à la condition d'ordre 4. Commençons toutefois par rappeler le schéma classique de "saute mouton", communément utilisé pour la discrétisation des équation de Maxwell. Il consiste à évaluer les champs non pas au même pas de temps, mais alternativement. Plus précisément, si Δt est le pas de discrétisation en temps, le champ électrique sera calculé aux instants $t^n = n\Delta t$ (ou instants entiers) :

$$\mathbf{E}_h^n \approx \mathbf{E}_h(t = n\Delta t) \quad (3.18)$$

tandis que le champ magnétique sera calculé aux instants $t^{n+\frac{1}{2}} = (n + \frac{1}{2})\Delta t$ (que nous appellerons instants demi entiers) :

$$\mathbf{H}_h^{n+\frac{1}{2}} \approx \mathbf{H}_h((n + \frac{1}{2})\Delta t) \quad (3.19)$$

Il nous reste alors le choix de l'instant de calcul de φ_h (qu'on notera dans toute la suite φ par commodité d'écriture).

- (i) Le premier choix naturel consiste à calculer cette variable, de la même façon que le champ magnétique, aux instants demi entiers. Nous désignerons alors par φ^n la moyenne donnée par l'expression suivante :

$$\varphi^n = \frac{\varphi^{n+\frac{1}{2}} + \varphi^{n-\frac{1}{2}}}{2}.$$

- (ii) L'autre choix consiste à calculer φ aux instants entiers, et dans ce cas on notera :

$$\varphi^{n+\frac{1}{2}} = \frac{\varphi^{n+1} + \varphi^n}{2}.$$

Dans les deux cas, les équations de (3.6) se discrétisent de la manière suivante :

$$\left\{ \begin{array}{ll} (i) & \mu_0 \left(\frac{\mathbf{H}_h^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{H}_h^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t}, \phi_h \right) + (\text{rot } \mathbf{E}_h^n, \phi_h) = 0 \quad \forall \phi_h \in X_h, \\ (ii) & \varepsilon_0 \left\langle \frac{\mathbf{E}_h^{n+1} - \mathbf{E}_h^n}{\Delta t}, \psi_h \right\rangle - \left(\text{rot } \psi_h, \mathbf{H}_h^{n+\frac{1}{2}} \right) \\ & + (\varphi^{n+\frac{1}{2}} \times \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{n} \times (\psi_h(0) \times \mathbf{n})) = 0 \quad \forall \psi_h \in V_h. \end{array} \right. \quad (3.20)$$

La discrétisation de la condition équivalente dépend par contre du choix qu'on fait pour l'instant de calcul de φ . Nous allons traiter l'incidence de ce choix dans le cas de la condition équivalente d'ordre 2.

3.2.1 Discrétisation en temps de la condition équivalente d'ordre 2 : schéma explicite

Ce choix consiste à évaluer la valeur de φ aux instants demi entiers. Nous verrons plus loin qu'il conduit à une résolution explicite dans un cas particulier, fréquent en pratique.

Ecriture du schéma

On considère donc le cas de la condition d'ordre 2 donnée par (2.19). On note (par commodité d'écriture également) \mathbf{M}_k le moment magnétique $\widetilde{\mathbf{M}}_k^\eta$. Puisque la condition équivalente fait intervenir le même ordre de dérivation entre φ et \mathbf{M} , il convient alors de choisir le même instant de discrétisation pour les deux champs. Le moment magnétique est donc calculé aux instants demi entiers. On propose par conséquent le schéma centré suivant pour la condition aux limites :

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_h^n(0) \times \mathbf{n}) = \eta\mu_0 \frac{\varphi^{n+\frac{1}{2}} - \varphi^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} \times \mathbf{n} + \eta\mu_0 \frac{\overline{\mathbf{M}}_k^{n+\frac{1}{2}} - \overline{\mathbf{M}}_k^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} \times \mathbf{n}, \quad (3.21)$$

où $\overline{\mathbf{M}}_k^{n+\frac{1}{2}}$ désigne la moyenne sur $]0, 1[$ de $\mathbf{M}_k^{n+\frac{1}{2}}$. On utilise, d'autre part la discrétisation suivante pour l'équation de Landau-Lifschitz-Gilbert, utilisé également par [6] pour l'étude numérique d'un milieu ferromagnétique :

$$\begin{cases} \frac{\mathbf{M}_k^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{M}_k^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} = \gamma \mathbf{H}_{Tk}^n \times \mathbf{M}_k^n + \frac{\alpha}{|\mathbf{M}_{0k}|} \mathbf{M}_k^n \times \frac{\mathbf{M}_k^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{M}_k^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} \\ \mathbf{H}_{Tk}^n = \varphi^n + \mathbf{H}_{sk} + K_a(p \cdot \mathbf{M}_k^n)p + [(\mathbf{M}_{0k} - \mathbf{M}_k^n) \cdot \mathbf{n}] \mathbf{n} \end{cases} \quad (3.22)$$

On a posé :

$$\mathbf{M}_k^n = \frac{\mathbf{M}_k^{n+\frac{1}{2}} + \mathbf{M}_k^{n-\frac{1}{2}}}{2}.$$

Caractère explicite du schéma

Dans le cas particulier d'une couche ferromagnétique homogène, ce schéma admet l'avantage d'une résolution explicite . En effet, si on suppose que les caractéristiques de la couche sont constants suivant l'épaisseur, alors il est très facile de constater à partir de (3.22) que $\mathbf{M}_k^{n+\frac{1}{2}}$ est lui aussi constant. On peut donc considérer $\mathbf{M}_k^{n+\frac{1}{2}}$ comme un vecteur de \mathbb{R}^3 et on a l'égalité :

$$\overline{\mathbf{M}}_k^{n+\frac{1}{2}} = \mathbf{M}_k^{n+\frac{1}{2}}.$$

Si on introduit par ailleurs

$$\mathbf{B}_h^{n+\frac{1}{2}} = \varphi^{n+\frac{1}{2}} + \mathbf{n} \times \left(\mathbf{M}_k^{n+\frac{1}{2}} \times \mathbf{n} \right), \quad (3.23)$$

alors cela nous mène à la résolution explicite suivante :

Supposons déjà calculés $\mathbf{B}_h^{n-\frac{1}{2}}$, $\mathbf{M}_k^{n-\frac{1}{2}}$, $\varphi^{n-\frac{1}{2}}$, \mathbf{E}_h^{n-1} et $\mathbf{H}_h^{n-\frac{1}{2}}$, alors la valeur de ces champs à l'instant suivant est calculée comme suit :

- 1) \mathbf{E}_h^{n+1} et $\mathbf{H}_h^{n+\frac{1}{2}}$ sont calculés par (3.20).
- 2) $\mathbf{B}_h^{n-\frac{1}{2}}$ est calculé par la condition (3.21).
- 3) $\mathbf{M}_k^{n+\frac{1}{2}}$ est calculé explicitement par (3.22). Ce calcul passe en pratique par la résolution d'une équation polynomiale de degré 3. Pour cela nous renvoyons le lecteur à [6] et [7].
- 4) $\varphi^{n+\frac{1}{2}}$ est calculé par (3.23).

Remarque 3.3 *Malheureusement, dès lors que les caractéristiques ne sont plus homogène, cette résolution explicite tombe en défaut.*

Nous remarquons finalement que notre schéma est bien centré en temps ce qui assure une approximation d'ordre 2 en temps.

Analyse de la stabilité : condition suffisante

Nous allons commencer par chercher une condition suffisante pour laquelle notre solution discrète n'explose pas quand $n \rightarrow \infty$, ce qui garantit la stabilité du schéma proposé. On utilise pour cela une méthode énergétique semblable à celle utilisée pour le modèle continu. Elle consiste à chercher une condition sur le pas de discrétisation en temps pour qu'une certaine énergie discrète de la solution reste bornée. Cette condition de stabilité est donnée par le théorème suivant :

Théorème 3.1 *Le schéma numérique décrit par (3.20), (3.21), et (3.22) est stable dès lors qu'est vérifiée la condition :*

$$\boxed{\Delta t^2 < \varepsilon_0 \mu_0 h^2 f\left(\frac{\eta}{h}\right)} \quad (3.24)$$

avec : $f(x) = (1 + 2x) - (1 + 4x^2)^{\frac{1}{2}}$

Notations

Nous utilisons dans toute la suite les notation suivantes :

$|\cdot|$ pour désigner le module d'un vecteur de \mathbb{R}^3 ou d'un vecteur de \mathbb{R}^2 .

$\|\cdot\|$ pour désigner la norme L^2 en espace.

et d'autre part :

$$r = \frac{\eta}{h}; \quad c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}; \quad \lambda = \frac{c \Delta t}{h}. \quad (3.25)$$

Preuve: La démonstration de 3.1 se divise en trois étapes. On commence d'abord par établir les deux propriétés fondamentales des équations ferromagnétiques :

- $\mathbf{M}_k^{n+\frac{1}{2}}$ est de norme constante. Prenons en effet le produit scalaire de l'équation (3.22) par \mathbf{M}_k^n . Il en résulte que :

$$\frac{d}{dt} \left(\left| \mathbf{M}_k^{n+\frac{1}{2}} \right|^2 - \left| \mathbf{M}_k^{n-\frac{1}{2}} \right|^2 \right) = 0.$$

Ainsi, pour tout n la norme L^2 de $\mathbf{M}_k^{n+\frac{1}{2}}$ reste constante :

$$\left\| \mathbf{M}_k^{n+\frac{1}{2}} \right\| = \left\| \mathbf{M}_{0k} \right\|.$$

- Décroissance de l'énergie : Considérons l'énergie suivante :

$$\mathcal{E}_T(n+\frac{1}{2}) = \mathcal{E}_v(n+\frac{1}{2}) + \eta \mathcal{E}_f(n+\frac{1}{2}) + \eta \mathcal{E}_r(n+\frac{1}{2}), \quad (3.26)$$

avec :

$$\mathcal{E}_v(n+\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} \left\{ \mu_0 \left\| \mathbf{H}_h^{n+\frac{1}{2}} \right\|^2 + \varepsilon_0 \left\langle \mathbf{E}_h^{n+1}, \mathbf{E}_h^n \right\rangle \right\},$$

$$\mathcal{E}_f(n+\frac{1}{2}) = \frac{\mu_0}{2} \left\{ \left\| \mathbf{H}_{sk} - \mathbf{M}_k^{n+\frac{1}{2}} \right\|^2 + \int_0^1 K_{ak} \left| p_k \cdot \mathbf{M}_k^{n+\frac{1}{2}} \right|^2 d\xi + \left\| (\mathbf{M}_{0k} - \mathbf{M}_k^{n+\frac{1}{2}}) \cdot \mathbf{n} \right\|^2 \right\},$$

et

$$\mathcal{E}_r(n+\frac{1}{2}) = \frac{\mu_0}{2} \left| \varphi^{n+\frac{1}{2}} \right|^2,$$

on vérifie alors que :

$$\frac{\mathcal{E}_T(n+\frac{1}{2}) - \mathcal{E}_T(n-\frac{1}{2})}{\Delta t} = -\frac{\eta\mu_0}{\gamma} \int_0^1 \frac{\alpha_k}{|\mathbf{M}_{0k}|} \left| \frac{\mathbf{M}_k^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{M}_k^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} \right|^2 d\xi. \quad (3.27)$$

Pour cela, écrivons la première équation de (3.20) avec $\phi_h = \mathbf{H}_h^{n+\frac{1}{2}} + \mathbf{H}_h^{n-\frac{1}{2}}$. On en déduit que :

$$\mu_0 \left(\left\| \mathbf{H}_h^{n+\frac{1}{2}} \right\|^2 - \left\| \mathbf{H}_h^{n-\frac{1}{2}} \right\|^2 \right) = -\Delta t \left(\text{rot } \mathbf{E}_h^n, \mathbf{H}_h^{n+\frac{1}{2}} + \mathbf{H}_h^{n-\frac{1}{2}} \right).$$

Prenons ensuite, dans ce même système $\psi_h = \mathbf{E}_h^n$ et faisons la somme des équations écrites à l'instant $n+1$ et à l'instant n . Il en résulte que :

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 \left\{ \left\langle \mathbf{E}_h^{n+1}, \mathbf{E}_h^n \right\rangle - \left\langle \mathbf{E}_h^n, \mathbf{E}_h^{n-1} \right\rangle \right\} &= \Delta t \left(\text{rot } \mathbf{E}_h^n, \mathbf{H}_h^{n+\frac{1}{2}} + \mathbf{H}_h^{n-\frac{1}{2}} \right) \\ &\quad - 2 \Delta t \left(\frac{\varphi^{n+\frac{1}{2}} + \varphi^{n-\frac{1}{2}}}{2} \times \mathbf{n} \right) \cdot \mathbf{n} \times (\mathbf{E}_h^n(0) \times \mathbf{n}) \end{aligned}$$

On aboutit finalement, lorsqu'on remplace $\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_h^n(0) \times \mathbf{n})$ par son expression dans la condition équivalente (3.21), à l'identité suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{E}_v(n+\frac{1}{2}) - \mathcal{E}_v(n-\frac{1}{2})}{\Delta t} + \eta \frac{\mathcal{E}_r(n+\frac{1}{2}) - \mathcal{E}_r(n-\frac{1}{2})}{\Delta t} \\ = -\eta \mu_0 \int_0^1 \frac{\mathbf{M}_k^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{M}_k^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} \cdot \frac{\varphi^{n+\frac{1}{2}} + \varphi^{n-\frac{1}{2}}}{2} d\xi = -\eta \mathcal{P}_k. \end{aligned}$$

Expression de \mathcal{P}_k : on peut exprimer $\varphi^n = \frac{\varphi^{n+\frac{1}{2}} + \varphi^{n-\frac{1}{2}}}{2}$ à l'aide de (3.22) par :

$$\varphi^n = \mathbf{H}_{Tk}^n - \mathbf{H}_{eff}^n$$

avec : $\mathbf{H}_{eff}^n = \mathbf{H}_{sk} + K_{ak}(p_k \cdot \mathbf{M}_k^n)p_k + ((\mathbf{M}_{0k} - \mathbf{M}_k^n) \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}$.

Puisque $\left| \mathbf{M}_k^{n+\frac{1}{2}} \right| = \left| \mathbf{M}_k^{n-\frac{1}{2}} \right|$, il est alors facile de constater que :

$$\left(\mathbf{H}_{eff}^n, \mathbf{M}_k^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{M}_k^{n-\frac{1}{2}} \right) = \frac{1}{2} \left(\mathcal{M}_k(n+\frac{1}{2}) - \mathcal{M}_k(n-\frac{1}{2}) \right)$$

en ayant posé : $\mathcal{M}_k(n+\frac{1}{2}) = \left| \mathbf{H}_{sk} - \mathbf{M}_k^{n+\frac{1}{2}} \right|^2 + K_{ak} \left| p_k \cdot \mathbf{M}_k^{n+\frac{1}{2}} \right|^2 + \left| (\mathbf{M}_{0k} - \mathbf{M}_k^{n+\frac{1}{2}}) \cdot \mathbf{n} \right|^2$.

Calculons par ailleurs le produit $(\mathbf{H}_{Tk}^n, \mathbf{M}_k^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{M}_k^{n-\frac{1}{2}})$. Cela peut se faire en prenant par exemple le produit scalaire de l'équation (3.22) par respectivement $(\Delta t \mathbf{H}_{Tk}^n)$ et $(\mathbf{M}_k^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{M}_k^{n-\frac{1}{2}})$. Il en résulte que :

$$\left(\mathbf{H}_{Tk}^n, \mathbf{M}_k^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{M}_k^{n-\frac{1}{2}} \right) = \Delta t \frac{\alpha_k}{\gamma |\mathbf{M}_{0k}|} \left| \frac{\mathbf{M}_k^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{M}_k^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} \right|^2$$

Ainsi le terme \mathcal{P}_k s'exprime par :

$$\mathcal{P}_k = \frac{\mathcal{E}_r(n+\frac{1}{2}) - \mathcal{E}_r(n-\frac{1}{2})}{\Delta t} + \frac{\mu_0}{\gamma} \int_0^1 \frac{\alpha_k}{|\mathbf{M}_{0k}|} \left| \frac{\mathbf{M}_k^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{M}_k^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} \right|^2 d\xi. \quad (3.28)$$

Ce qui nous permet de conclure la démonstration de (3.27).

••• *Conclusion de la preuve*: Sous la condition (3.24), l'énergie $\mathcal{E}_T(n+\frac{1}{2})$ est positive pour tout n . A l'aide du résultat de décroissance (3.27) on constate alors facilement que le schéma est stable sous cette condition.

D'après son expression, $\mathcal{E}_T(n+\frac{1}{2})$ vérifie trivialement la minoration suivante :

$$\mathcal{E}_T(n+\frac{1}{2}) \geq \frac{1}{2} \left(\mu_0 \|\mathbf{H}_h^{n+\frac{1}{2}}\|^2 + \varepsilon_0 \langle \mathbf{E}_h^{n+1}, \mathbf{E}_h^n \rangle + \eta \mu_0 |\varphi^{n+\frac{1}{2}}|^2 \right)$$

Or, par définition on peut écrire que :

$$\|\mathbf{H}_h^{n+\frac{1}{2}}\|^2 = h \underbrace{\sum_{i=1}^{N-1} |\mathbf{H}_h^{n+\frac{1}{2}}(i - \frac{1}{2})|^2}_{\mathbf{H}_{int}^2} + h \underbrace{|\mathbf{H}_h^{n+\frac{1}{2}}(N - \frac{1}{2})|^2}_{\mathbf{H}_N^2}$$

et d'autre part on a la propriété suivante du produit scalaire:

$$\langle \mathbf{E}_h^{n+1}, \mathbf{E}_h^n \rangle = \langle \mathbf{E}^{n+\frac{1}{2}}, \mathbf{E}^{n+\frac{1}{2}} \rangle - \frac{\Delta t^2}{4} \underbrace{\left\langle \frac{\mathbf{E}_h^{n+1} - \mathbf{E}}{\Delta t}, \frac{\mathbf{E}_h^{n+1} - \mathbf{E}}{\Delta t} \right\rangle}_{\mathcal{I}}$$

On en déduit alors la nouvelle minoration de $\mathcal{E}_T(n+\frac{1}{2})$:

$$\mathcal{E}_T(n+\frac{1}{2}) \geq \frac{1}{2} \left(\mu_0 h \mathbf{H}_{int}^2 + \mu_0 h \mathbf{H}_N^2 + \eta \mu_0 |\varphi^{n+\frac{1}{2}}|^2 - \varepsilon_0 \frac{\Delta t^2}{4} \mathcal{I} \right)$$

Utilisons maintenant les équations scalaires (3.8) et (3.9) vérifiées par les composantes de \mathbf{E}_h^n dans la base de V_h et la définition du produit scalaire \langle, \rangle , pour exprimer le terme \mathcal{I} :

$$\mathcal{I} = h \sum_{i=1}^{N-1} \frac{1}{(h\varepsilon_0)^2} \left| \mathbf{H}_h^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}) - \mathbf{H}_h^{n+\frac{1}{2}}(i - \frac{1}{2}) \right|^2 + \frac{h}{2} \frac{4}{(h\varepsilon_0)^2} \left| \varphi^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{H}_h^{n+\frac{1}{2}}(N - \frac{1}{2}) \right|^2.$$

En utilisant l'identité $|a - b|^2 \leq 2(a^2 + b^2)$ pour majorer le premier terme et en développant le second terme, on établit la majoration suivante de \mathcal{I} :

$$\mathcal{I} \leq \frac{4}{h\varepsilon_0^2} \left\{ \mathbf{H}_{int}^2 + \frac{1}{2} \left| \varphi^{n+\frac{1}{2}} \right|^2 + \mathbf{H}_N^2 - \left(\varphi^{n+\frac{1}{2}}, \mathbf{H}_N \right) \right\}$$

La minoration de $\mathcal{E}_T(n+\frac{1}{2})$ s'écrit alors (en utilisant les notations (3.25)):

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_T(n+\frac{1}{2}) &\geq \frac{\mu_0 h}{2} \left((1 - \lambda^2) \mathbf{H}_{int}^2 \right) \\ &\quad + \frac{\mu_0 h}{2} \left\{ (1 - \lambda^2) \mathbf{H}_N^2 + (r - \frac{1}{2} \lambda^2) \left| \varphi^{n+\frac{1}{2}} \right|^2 + \lambda^2 (\varphi^{n+\frac{1}{2}}, \mathbf{H}_N) \right\} \end{aligned}$$

Pour que $\mathcal{E}_T(n+\frac{1}{2})$ soit positive, il suffit que :

$$\lambda^2 \leq 1 \quad \text{et} \quad \lambda^4 - 4(1 - \lambda^2)(r - \frac{1}{2} \lambda^2) \leq 0 \quad (3.29)$$

Or: $\lambda^4 - 4(1 - \lambda^2)(r - \frac{1}{2} \lambda^2) = \left(\lambda^2 - \left((1 + 2r) + \sqrt{1 + 4r^2} \right) \right) \left(\lambda^2 - \left((1 + 2r) - \sqrt{1 + 4r^2} \right) \right)$.

Puisque $\left((1 + a) + \sqrt{1 + a^2} \right) > 1$, la condition (3.29) est donc équivalente à :

$$\lambda^2 \leq 1 \quad \text{et} \quad \lambda^2 \leq f(r).$$

D'autre part, pour tout $r \geq 0$ on a $f(r) < 1$. La condition suffisante de stabilité est donc tout simplement: $\lambda^2 \leq f(r)$.

Analyse de la stabilité : condition nécessaire

Pour trouver une condition nécessaire nous allons nous baser sur une analyse par le critère de Kreiss du modèle linéaire, obtenu en enlevant la contribution du moment magnétique dans la condition équivalente.

Dans ce cas linéaire les deux polarisations (E_y, H_z) et $(E_z, -H_y)$ sont découplées et vérifient les mêmes équations. L'étude de la stabilité du problème discret complet se ramène donc à l'étude de la stabilité du problème linéaire suivant :

Pour $i \leq N$:

$$\begin{cases} \left(E^{n+1}(i) - E^n(i) \right) + \lambda \nu \left(H^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}) - H^{n-\frac{1}{2}}(i - \frac{1}{2}) \right) = 0 \\ \nu \left(H^{n+\frac{1}{2}}(i - \frac{1}{2}) - H^{n-\frac{1}{2}}(i - \frac{1}{2}) \right) + \lambda (E^n(i) - E^n(i-1)) = 0 \end{cases} \quad (3.30)$$

Avec la condition aux limites en N :

$$\begin{cases} \varphi^{n+\frac{1}{2}} = \frac{H^{n+\frac{1}{2}}(N+\frac{1}{2}) - H^{n+\frac{1}{2}}(N-\frac{1}{2})}{2} \\ r \nu \left(\varphi^{n+\frac{1}{2}} - \varphi^{n-\frac{1}{2}} \right) = \lambda E^n(N). \end{cases} \quad (3.31)$$

Nous rappelons les notations adoptées :

$$\lambda = \frac{c \Delta t}{h}, \quad c = (\mu_0 \varepsilon_0)^{-\frac{1}{2}}, \quad \nu = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \quad \text{et} \quad r = \frac{\eta}{h} \quad (3.32)$$

Nous avons introduit, par ailleurs, un nœud fictif en $N+\frac{1}{2}$ pour H afin de permettre une écriture homogène des équations à l'intérieur du domaine (il s'agit là d'un pur artifice de calcul).

L'étude de la stabilité de la condition (3.31) par le critère de Kreiss consiste à tester l'existence de solutions sous formes d'ondes planes dont la norme explose exponentiellement en temps. Considérons en effet les ondes solutions de la forme :

$$E^n(i) = E \cdot z^{2n} \kappa^{2i} \quad \text{et} \quad H^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}) = H \cdot z^{2n+1} \kappa^{2i+1}. \quad (3.33)$$

avec z un nombre complexe de module strictement supérieur à 1. Le critère nécessaire de stabilité s'énonce comme suit ([10] et [11]):

Théorème 3.2 *Si le schéma (3.30) et (3.31) est stable au sens de GKS alors il n'existe aucune solution de la forme (3.33) avec $|z| > 1$ et $|\kappa| > 1$.*

Les ondes (3.33) avec $|\kappa| > 1$ sont en effet des ondes de norme finie en espace, et prennent source aux niveau de la condition aux limites. Ils sont donc susceptibles d'être excité par des erreurs numériques et provoquer accroissement exponentiel en temps de leurs normes.

Théorème 3.3 *La condition suivante est nécessaire pour la stabilité du schéma (3.30) et (3.31) :*

$$\boxed{\lambda^2 \leq g(r) = \frac{4r(1 + \sqrt{1 + r^2})}{(r + 1 + \sqrt{1 + r^2})^2}}, \quad (3.34)$$

où λ et r sont donnés par (3.32).

Preuve: En injectant les solutions (3.33) dans (3.30) on obtient

$$\begin{cases} E \cdot (z - z^{-1}) + \lambda \nu H \cdot (\kappa - \kappa^{-1}) = 0, \\ \nu H \cdot (z - z^{-1}) + \lambda E \cdot (\kappa - \kappa^{-1}) = 0. \end{cases} \quad (3.35)$$

L'existence de telle solution est donc liée à la relation de dispersion :

$$(z - z^{-1})^2 = \lambda^2 (\kappa - \kappa^{-1})^2. \quad (3.36)$$

• Premier cas :

$$(z - z^{-1}) = -\lambda (\kappa - \kappa^{-1}) \quad (3.37)$$

Dans ce cas : $E = \nu H$ d'après (3.35), et la condition aux limite (3.31) s'écrit :

$$\left\{ \frac{1}{2} (\kappa + \kappa^{-1}) \cdot (z - z^{-1}) - \frac{\lambda}{r} \right\} \nu H = 0$$

L'existence de solutions non triviales nécessite donc (en utilisant (3.37)) :

$$\kappa^4 + 2r^{-1}\kappa^2 - 1 = 0. \quad (3.38)$$

Les solutions de (3.38) avec $|\kappa| > 1$ sont telles que que :

$$\kappa^2 = -r^{-1}(1 + \sqrt{1 + r^2}) \quad (3.39)$$

Pour que ces solutions ne correspondent pas à des ondes instables il faut que les z solutions de (3.37) ne soient pas de module supérieur strictement à un. Or, pour les κ de la forme (3.39), $z' = \imath z$ est solution de :

$$z'^2 \pm \lambda(|\kappa| + |\kappa|^{-1}) z' + 1 = 0.$$

Il s'agit là d'un polynôme à coefficient réel dont le produit des racines vaut 1. La condition $|z'| \leq 1$ est donc équivalente à :

$$\lambda^2 (|\kappa| + |\kappa|^{-1})^2 - 4 \leq 0.$$

ce qui nous donne la condition (3.34) en utilisant (3.39).

•• Deuxième cas :

$$(z - z^{-1}) = \lambda (\kappa - \kappa^{-1}) \quad (3.40)$$

Dans ce cas : $E = -\nu H$. On constate alors on posant $z' = -z$ et $H' = -H$ qu'on est ramené au cas précédent. Le résultat est donc le même.

Remarque 3.4 Cette étude de stabilité, par le critère de Kreiss, ne s'est pas intéressée aux instabilités faibles du schéma, en examinant le cas limite $|z| \rightarrow 1$. L'étude de ce cas aurait donné une condition suffisante de stabilité mais qui se trouve inintéressante puisqu'elle concerne le cas linéaire seulement. De plus on verra dans le paragraphe qui suit que les deux conditions (3.24) et (3.34) ont le même comportement limite ce qui donne dans ce cas une condition nécessaire et suffisante de stabilité.

Comparaison des deux conditions

La condition nécessaire (3.34) : $\lambda^2 \leq g(r)$ est à comparer avec la condition suffisante donnée par (3.24) : $\lambda^2 \leq f(r)$. En traçant les deux courbes représentatives de f et g , on constate qu'on a bien $g \geq f$, ce qui concorde bien avec la nature des deux conditions.

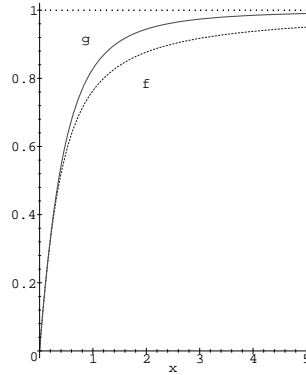


FIG. 3.4 – *Comparaison des deux critères.*

Il est intéressant par ailleurs de comparer ces conditions aux cas limites suivant :

- $\eta \rightarrow 0$: f et g se comportent toutes les deux comme $2r$. On peut alors écrire dans ce cas la condition de stabilité nécessaire et suffisante suivante :

$$c \Delta t \leq \sqrt{2 h \eta}.$$

- $\eta \rightarrow +\infty$: Les deux fonctions tendent vers 1, ce qui nous permet de retrouver la condition classique de stabilité :

$$c \Delta t \leq h.$$

Nous constatons que dans le cas $\eta \rightarrow 0$ la condition de stabilité dépend de l'épaisseur de la couche ferromagnétique, ce qui peut être pénalisant pour les simulations numériques avec une couche de très faible épaisseur. Ceci n'est pas le cas du schéma suivant.

3.2.2 Discrétisation en temps de la condition équivalente d'ordre 2 : schéma implicite

La deuxième alternative consiste à calculer la variable auxiliaire φ et le moment magnétique \mathbf{M} aux mêmes instants entier t^n que le champ électrique \mathbf{E}_h .

Ce choix nous conduit aux équations discrètes suivantes :

$$\mathbf{n} \times \left(\frac{\mathbf{E}_h^{n+1}(0) + \mathbf{E}_h^n(0)}{2} \times \mathbf{n} \right) = \eta \mu_0 \frac{\varphi^{n+1} - \varphi^n}{\Delta t} \times \mathbf{n} + \eta \mu_0 \frac{\overline{\mathbf{M}}_k^{n+1} - \overline{\mathbf{M}}_k^n}{\Delta t} \times \mathbf{n}, \quad (3.41)$$

avec \mathbf{M}_k^{n+1} solution de :

$$\begin{cases} \frac{\mathbf{M}_k^{n+1} - \mathbf{M}_k^n}{\Delta t} = \gamma \mathbf{H}_{Tk}^{n+\frac{1}{2}} \times \mathbf{M}_k^{n+\frac{1}{2}} + \frac{\alpha_k}{|\mathbf{M}_{0k}|} \mathbf{M}_k^{n+\frac{1}{2}} \times \frac{\mathbf{M}_k^{n+1} - \mathbf{M}_k^n}{\Delta t} \\ \mathbf{H}_{Tk}^{n+\frac{1}{2}} = \varphi^{n+\frac{1}{2}} + \mathbf{H}_{sk} + K_{ak}(p_k \cdot \mathbf{M}_k^{n+\frac{1}{2}})p_k + ((\mathbf{M}_{0k} - \mathbf{M}_k^{n+\frac{1}{2}}) \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} \end{cases} \quad (3.42)$$

On a posé :

$$\mathbf{M}_k^{n+\frac{1}{2}} = \frac{\mathbf{M}_k^{n+1} + \mathbf{M}_k^n}{2} \quad \text{et} \quad \varphi^{n+\frac{1}{2}} = \frac{\varphi^{n+1} + \varphi^n}{2}.$$

On constate que la possibilité d'une résolution explicite tombe ici en défaut puisque la valeur de $\varphi^{n+\frac{1}{2}}$ dépend de la valeur de $\overline{\mathbf{M}}_k^{n+1}$. En pratique, on est amené alors à considérer un système non linéaire à $3N' + 2$ variables qu'une méthode de Newton par exemple s'adapte bien à sa résolution. Bien entendu, la discrétisation du milieu ferromagnétique, qui correspond au nombre de noeuds N' , conditionne fortement le coût de la méthode.

Analyse de la stabilité

Théorème 3.4 *Le schéma numérique décrit par (3.20), (3.41), et (3.42) est stable si et seulement si :*

$$\boxed{\Delta t^2 < \varepsilon_0 \mu_0 h^2} \quad (3.43)$$

Preuve : Nous allons procéder de la même manière que dans le cas précédent en utilisant une méthode énergétique. La condition obtenue est en fait suffisante mais elle est aussi nécessaire car elle coïncide avec la condition de stabilité de Cauchy pour le problème (3.20). La démonstration se décompose également en trois étapes :

- \mathbf{M}_k^n est de norme constante :: ce résultat s'obtient de façon analogue au précédent en prenant le produit scalaire de l'équation (3.42) par $\mathbf{M}_k^{n+\frac{1}{2}}$. Il en résulte que :

$$\frac{d}{dt} \left(|\mathbf{M}_k^{n+1}|^2 - |\mathbf{M}_k^n|^2 \right) = 0. \quad (3.44)$$

Ainsi, pour tout n la norme L^2 de \mathbf{M}_k^n reste constante :

$$\|\mathbf{M}_k^n\| = \|\mathbf{M}_{0k}\|.$$

- Décroissance de l'énergie : introduisons l'énergie :

$$\mathcal{E}_T(n+1) = \mathcal{E}_v(n+1) + \eta \mathcal{E}_f(n+1) + \eta \mathcal{E}_r(n+1), \quad (3.45)$$

avec :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_v(n+1) &= \frac{1}{2} \left\{ \mu_0 \left(\mathbf{H}_h^{n+\frac{3}{2}}, \mathbf{H}_h^{n+\frac{1}{2}} \right) + \varepsilon_0 \|\mathbf{E}_h^{n+1}\|_c^2 \right\}, \\ \mathcal{E}_f(n+1) &= \frac{1}{2} \mu_0 \left\{ \left\| \mathbf{H}_{sk} - \mathbf{M}_k^{n+1} \right\|^2 + \int_0^1 K_{ak} \left| p_k \cdot \mathbf{M}_k^{n+1} \right|^2 d\xi + \left\| (\mathbf{M}_{0k} - \mathbf{M}_k^{n+1}) \cdot \mathbf{n} \right\|^2 \right\}, \\ \mathcal{E}_r(n+1) &= \frac{\mu_0}{2} \left| \varphi^{n+1} \right|^2, \end{aligned}$$

alors on vérifie que :

$$\frac{\mathcal{E}_T(n+1) - \mathcal{E}_T(n)}{\Delta t} = -\frac{\eta\mu_0}{\gamma} \int_0^1 \frac{\alpha_k}{|\mathbf{M}_{0k}|} \left| \frac{\mathbf{M}_k^{n+1} - \mathbf{M}_k^n}{\Delta t} \right|^2 d\xi. \quad (3.46)$$

En effet, écrivons la première équation du système (3.20) aux instants t^n et t^{n+1} en prenant $\phi_h = \mathbf{H}_h^{n+\frac{1}{2}}$. Puis faisons la sommes des deux égalités. Il en résulte que :

$$\mu_0 \left\{ \left(\mathbf{H}_h^{n+\frac{3}{2}}, \mathbf{H}_h^{n+\frac{1}{2}} \right) - \left(\mathbf{H}_h^{n+\frac{1}{2}}, \mathbf{H}_h^{n-\frac{1}{2}} \right) \right\} = -\Delta t \left(\text{rot} \left(\mathbf{E}_h^{n+1} + \mathbf{E}_h^n \right), \mathbf{H}_h^{n+\frac{1}{2}} \right). \quad (3.47)$$

Considérons ensuite la deuxième équation de (3.20) et prenons $\psi_h = \mathbf{E}_h^{n+1} + \mathbf{E}_h^n$. Elle nous conduit à la nouvelle égalité suivante :

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 \left\{ \|\mathbf{E}_h^{n+1}\|_c^2 - \|\mathbf{E}_h^n\|_c^2 \right\} &= \Delta t \left(\text{rot} \left(\mathbf{E}_h^{n+1} + \mathbf{E}_h^n \right), \mathbf{H}_h^{n+\frac{1}{2}} \right) \\ &\quad - \Delta t \left(\frac{\varphi^{n+1} + \varphi^n}{2} \times \mathbf{n} \right) \cdot \mathbf{n} \times \left(\mathbf{E}_h^{n+1}(0) + \mathbf{E}_h^n(0) \times \mathbf{n} \right) \end{aligned} \quad (3.48)$$

où on a utilisé la notation suivante pour la norme avec condensation de masse :

$$\|\mathbf{E}_h^{n+1}\|_c^2 = \left\langle \mathbf{E}_h^{n+1}, \mathbf{E}_h^{n+1} \right\rangle. \quad (3.49)$$

Ces deux égalités nous permettent d'établir l'identité suivante, après avoir remplacé $\left\{ \mathbf{E}_h^{n+1}(0) + \mathbf{E}_h^n(0) \right\}$ par son expression dans la condition équivalente (3.41).

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{E}_v(n+1) - \mathcal{E}_v(n)}{\Delta t} + \eta \frac{\mathcal{E}_r(n+1) - \mathcal{E}_r(n)}{\Delta t} \\ = -\eta \mu_0 \int_0^1 \frac{\mathbf{M}_k^{n+1} - \mathbf{M}_k^n}{\Delta t} \cdot \frac{\varphi^{n+1} + \varphi^n}{2} d\xi = -\eta \mathcal{P}_k. \end{aligned}$$

Cette égalité fait intervenir un produit scalaire \mathcal{P}_k analogue a celui du paragraphe suivant (3.28) (remplacer $n - \frac{1}{2}$ par n). On démontre de manière identique que :

$$\mathcal{P}_k = \frac{\mathcal{E}_f(n+1) - \mathcal{E}_f(n)}{\Delta t} + \frac{\mu_0}{\gamma} \int_0^1 \frac{\alpha_k}{|\mathbf{M}_{0k}|} \left| \frac{\mathbf{M}_k^{n+1} - \mathbf{M}_k^n}{\Delta t} \right|^2 d\xi. \quad (3.50)$$

Ce qui permet de conclure.

••• *Conclusion de la preuve : Sous la condition (3.43) l'énergie $\mathcal{E}_T(n)$ est positive pour tout n . Par le résultat précédent, notre schéma est donc stable sous cette condition.*

La suite de la preuve est tout à fait classique, incluse ici pour être complet. On utilise la minoration suivante de \mathcal{E}_T :

$$\mathcal{E}_T(n) \geq \frac{1}{2} \left\{ \mu_0 \left(\mathbf{H}_h^{n+\frac{1}{2}}, \mathbf{H}_h^{n-\frac{1}{2}} \right) + \varepsilon_0 \|\mathbf{E}_h^n\|_c^2 \right\} \quad (3.51)$$

Or :

$$\left(\mathbf{H}_h^{n+\frac{1}{2}}, \mathbf{H}_h^{n-\frac{1}{2}} \right) = \left\| \frac{\mathbf{H}_h^{n+\frac{1}{2}} + \mathbf{H}_h^{n-\frac{1}{2}}}{2} \right\|^2 - \frac{\Delta t^2}{4} \left\| \frac{\mathbf{H}_h^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{H}_h^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} \right\|^2$$

D'autre part, d'après la première équation de (3.41) écrite composante par composante dans la base canonique de X_h , on a :

$$\left\| \frac{\mathbf{H}_h^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{H}_h^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} \right\|^2 \leq \frac{4}{\mu_0^2 h^2} \|\mathbf{E}_h^n\|_c^2$$

Ainsi résulte la minoration :

$$\mathcal{E}_T(n) \geq \frac{1}{2}\mu_0 \left\| \frac{\mathbf{H}_h^{n+\frac{1}{2}} + \mathbf{H}_h^{n-\frac{1}{2}}}{2} \right\|^2 + \frac{1}{2}\varepsilon_0 \left(1 - \frac{\Delta t^2}{\varepsilon_0 \mu_0 h^2} \right) \|\mathbf{E}_h^n\|_c^2$$

Ce qui montre que $\mathcal{E}_T(n)$ est positive, et donc notre schéma est stable, sous la CFL classique :

$$\Delta t^2 < \varepsilon_0 \mu_0 h^2.$$

3.2.3 Discrétisation en temps de la condition équivalente d'ordre 4

Considérons maintenant le cas de la condition d'ordre 4 donnée par (2.47) et modifiée par les considérations du paragraphe (3.1.2). On remarque que même pour une couche homogène le moment magnétique ne reste pas constant suivant l'épaisseur. L'avantage du premier choix de discrétisation de la condition d'ordre 2 tombe ainsi en défaut. C'est pourquoi nous optons pour l'autre choix plus stable, qui consiste à calculer φ , \mathbf{M}_k et Φ_k aux mêmes instants entiers que le champ électrique \mathbf{E}_h .

Nous avons besoin d'introduire une nouvelle inconnue dans le schéma qu'on propose. Il s'agit en occurrence de la dérivé première en temps de Φ_k que l'on notera par $\dot{\Phi}_k$. Cette inconnue est également calculée aux instants entiers. Cela nous conduit aux équations discrètes suivantes :

$$\mathbf{n} \times \left(\frac{\mathbf{E}_h^{n+1}(0) + \mathbf{E}_h^n(0)}{2} \times \mathbf{n} \right) = \eta \mu_0 \int_0^1 \frac{\Phi_k^{n+1} - \Phi_k^n}{\Delta t} \times \mathbf{n} d\zeta \quad (3.52)$$

avec Φ_k^{n+1} solution de :

$$\left| \begin{aligned} \frac{\Phi_k^{n+1} + \Phi_k^n}{2} + \mu_0 \eta^2 \int_0^1 \theta_k \frac{\dot{\Phi}_k^{n+1} - \dot{\Phi}_k^n}{\Delta t} d\zeta &= \frac{\varphi^{n+1} + \varphi^n}{2} + \mathbf{n} \times \left(\frac{\mathbf{M}_k^{n+1} + \mathbf{M}_k^n}{2} \times \mathbf{n} \right) \\ \frac{\dot{\Phi}_k^{n+1} + \dot{\Phi}_k^n}{2} &= \frac{\Phi_k^{n+1} - \Phi_k^n}{\Delta t} \end{aligned} \right. \quad (3.53)$$

et \mathbf{M}_k^{n+1} solution de :

$$\left| \begin{aligned} \frac{\mathbf{M}_k^{n+1} - \mathbf{M}_k^n}{\Delta t} &= \gamma \mathbf{H}_{Tk}^{n+\frac{1}{2}} \times \mathbf{M}_k^{n+\frac{1}{2}} + \frac{\alpha}{|\mathbf{M}_{0k}|} \mathbf{M}_k^{n+\frac{1}{2}} \times \frac{\mathbf{M}_k^{n+1} - \mathbf{M}_k^n}{\Delta t} \\ \mathbf{H}_{Tk}^{n+\frac{1}{2}} &= \Phi_k^{n+\frac{1}{2}} + \mathbf{n} \times \left(\mathbf{M}_k^{n+\frac{1}{2}} \times \mathbf{n} \right) + \mathbf{H}_{sk} + K_{ak} \left(p \cdot \mathbf{M}_k^{n+\frac{1}{2}} \right) p + (\mathbf{M}_{0k} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} \end{aligned} \right. \quad (3.54)$$

où on a posé

$$\mathbf{M}_k^{n+\frac{1}{2}} = \frac{\mathbf{M}_k^{n+1} + \mathbf{M}_k^n}{2} \text{ et } \Phi_k^{n+\frac{1}{2}} = \frac{\Phi_k^{n+1} + \Phi_k^n}{2}.$$

De la même manière que pour le schéma (3.41) et (3.42), on aura à résoudre un système non linéaire mais de taille plus grande à cause des inconnues supplémentaires Φ_k et $\dot{\Phi}_k$. En fait, par un calcul simple on peut se ramener à un système de $5N'$ inconnues portant sur Φ_k^{n+1} et \mathbf{M}_k^{n+1} . La résolution par une méthode de Newton est également bien adaptée à ce schéma.

Théorème 3.5 *Le schéma numérique décrit par (3.20), (3.52), (3.53) et (3.54) est stable si et seulement si :*

$$\boxed{\Delta t^2 < \varepsilon_0 \mu_0 h^2} \quad (3.55)$$

Preuve: La démonstration repose encore une fois sur une méthode énergétique et demeure analogue à la démonstration de stabilité dans le cas continu. On remarque en effet que ce schéma conserve d'un pas de temps à un autre la norme du moment magnétique : équation (3.44). Considérons maintenant l'énergie discrète :

$$\mathcal{E}_T(n+1) = \mathcal{E}_v(n+1) + \eta \mathcal{E}_i(n+1) + \eta \mathcal{E}_r(n+1), \quad (3.56)$$

avec :

$$\mathcal{E}_v(n+1) = \frac{1}{2} \left\{ \mu_0 \left(\mathbf{H}_h^{n+\frac{3}{2}}, \mathbf{H}_h^{n+\frac{1}{2}} \right) + \varepsilon_0 \|\mathbf{E}_h^{n+1}\|_c^2 \right\},$$

$$\mathcal{E}_i(n+1) = \frac{1}{2} \mu_0 \left\{ \|\mathbf{H}_{sk} - \mathbf{M}_k^{n+1}\|^2 + K_{ak} \|p \mathbf{M}_k^{n+1}\|^2 + \|(\mathbf{M}_{0k} - \mathbf{M}_k^{n+1}) \cdot \mathbf{n}\|^2 \right\},$$

et

$$\mathcal{E}_r(n+1) = \frac{1}{2} \mu_0 \int_0^1 \left\{ \left| \Phi_k^{n+1} - \mathbf{n} \times (\mathbf{M}_k^{n+1} \times \mathbf{n}) \right|^2 + \eta^2 \mu_0 \int_0^1 \theta_k \left| \dot{\Phi}_k^{n+1} \right|^2 d\zeta \right\} d\xi$$

alors on a :

$$\frac{\mathcal{E}_T(n+1) - \mathcal{E}_T(n)}{\Delta t} = -\frac{\eta \mu_0}{\gamma} \int_0^1 \frac{\alpha_k}{|\mathbf{M}_{0k}|} \left| \frac{\mathbf{M}_k^{n+1} - \mathbf{M}_k^n}{\Delta t} \right|^2 d\xi.$$

Le principe de la démonstration est le même que pour la condition d'ordre 2. En regroupant les deux équations (3.47) et (3.48), qui restent valables, et en utilisant la condition aux limite (3.52) nous obtenons :

$$\frac{\mathcal{E}_v(n+1) - \mathcal{E}_v(n)}{\Delta t} + \eta \mu_0 \int_0^1 \frac{\Phi_k^{n+1} - \Phi_k^n}{\Delta t} \cdot \frac{\varphi^{n+1} + \varphi^n}{2} d\xi = 0 \quad (3.57)$$

On exprime alors $\frac{\varphi^{n+1} + \varphi^n}{2}$ à l'aide de (3.53) et on remplace dans (3.57). Il en résulte l'égalité suivante :

$$\frac{\mathcal{E}_v(n+1) - \mathcal{E}_v(n)}{\Delta t} + \eta \mu_0 \int_0^1 \left\{ \frac{\Phi_k^{n+1} - \Phi_k^n}{\Delta t} \cdot \frac{\phi_k^{n+1} + \phi_k^n}{2} + \eta^2 \mu_0 \int_0^1 \theta_k \left| \dot{\Phi}_k^{n+1} \right|^2 d\zeta \right\} d\xi = 0. \quad (3.58)$$

où on a posé :

$$\phi_k^n = \Phi_k^n - \mathbf{n} \times (\mathbf{M}_k^n \times \mathbf{n}).$$

D'autre part, puisque (3.44) est vérifiée, on constate que :

$$\begin{aligned} \frac{\Phi_k^{n+1} - \Phi_k^n}{\Delta t} \cdot \frac{\phi_k^{n+1} + \phi_k^n}{2} &= \frac{1}{2} \frac{|\phi_k^{n+1}|^2 - |\phi_k^n|^2}{\Delta t} + \frac{1}{2} \frac{|\mathbf{M}_k^{n+1} \mathbf{n}|^2 - |\mathbf{M}_k^n \mathbf{n}|^2}{\Delta t} \\ &+ \frac{\mathbf{M}_k^{n+1} - \mathbf{M}_k^n}{\Delta t} \cdot \frac{\Phi_k^{n+1} + \Phi_k^n}{2} \end{aligned} \quad (3.59)$$

Nous obtenons ainsi en remplaçant (3.59) dans (3.58) :

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{E}_v(n+1) - \mathcal{E}_v(n)}{\Delta t} + \eta \frac{\mathcal{E}_\Gamma(n+1) - \mathcal{E}_\Gamma(n)}{\Delta t} \\ = -\eta \mu_0 \int_0^1 \frac{\mathbf{M}_k^{n+1} - \mathbf{M}_k^n}{\Delta t} \cdot \frac{\psi_k^{n+1} + \psi_k^n}{2} d\xi = -\eta \mathcal{P}_k. \end{aligned} \quad (3.60)$$

avec : $\psi_k^n = \Phi_k^n + (\mathbf{M}_k^n \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}$. Le terme \mathcal{P}_k se traite exactement de la même façon que dans le cas précédent et admet la même expression (3.50), ce qui achève la démonstration de la décroissance de l'énergie. Il nous reste maintenant à démontrer que cette énergie reste toujours positive sous la condition (3.55), mais ceci est déjà prouvé puisque (3.51) est toujours valable ainsi que les minoration qui suivent.

Chapitre 4

Résultats numériques

Dans ce chapitre, nous présentons une comparaison numérique entre la solution exacte $(\mathbf{E}_h^\eta, \mathbf{H}_h^\eta)$ de notre problème et la solution approchée $(\tilde{\mathbf{E}}_h^\eta, \tilde{\mathbf{H}}_h^\eta)$. Les cas tests ont été choisis pour illustrer les différentes actions d'une couche ferromagnétique sur une onde incidente.

4.1 Description des expériences

Dans toutes les expériences numériques, nous avons considéré un domaine du vide de longueur L . Il contient en $x = 0$ une source en \mathbf{E} émettant un signal de Ricker (dérivé deuxième d'une gaussienne) de fréquence f :

$$\mathbf{E}(x, t) = 2\pi^2 \left(2\pi^2 (ft - 1)^2 - 1 \right) \exp \left(-\pi^2 (ft - 1)^2 \right) \chi_{[0, \frac{2}{f}]}(t) \cdot \delta(x) \cdot \mathbf{e}_y. \quad (4.1)$$

La source est donc éteinte pour $ft > 2$. Elle excite initialement la polarisation $(\mathbf{E}_y, \mathbf{H}_z)$.

La couche ferromagnétique est située en $x = L$: c'est le lieu d'application de la condition équivalente. L'épaisseur de la couche est η . Par ailleurs, et pour éviter les réflexions à gauche du domaine de calcul, on prolonge le domaine du vide dans les $x < 0$ jusqu'à $x = -x_0$ et on applique en $-x_0$ une condition absorbante du premier ordre (qui est parfaitement transparente en 1D). Nous observons l'évolution de l'onde au cours du temps en un point du vide.

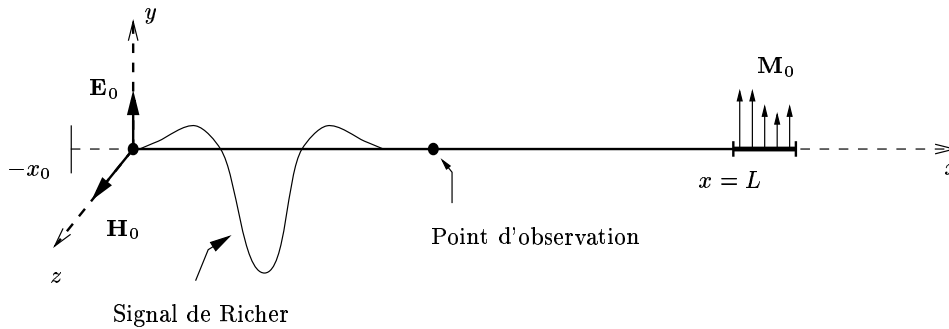


FIG. 4.1 – Description de l'expérience

La couche ferromagnétique est caractérisée par la donnée de :

- $\mathbf{M}_0(x) = \mathbf{M}_{0,y}(x) \cdot \mathbf{e}_y$: distribution initiale du moment magnétique. L'orientation de \mathbf{M}_0 selon l'axe \mathbf{e}_y permet d'avoir une interaction maximale avec le champ magnétique incident puisque l'équation (LLG) fait intervenir le produit vectoriel de \mathbf{H} par \mathbf{M} .
- $\mathbf{H}_s(x) = \mathbf{H}_{s,y}(x) \cdot \mathbf{e}_y$: distribution du champ magnétique statique. \mathbf{H}_s est orienté selon l'axe \mathbf{e}_y pour garantir l'équilibre initial dans la couche ferromagnétique.
- $\alpha(x)$: facteur d'amortissement.

La constante K_a est prise égale à 0 dans tous les cas tests.

4.2 Validation de la condition d'ordre 2

Nous allons tester en premier lieu la condition équivalente d'ordre 2 (qui est en réalité d'ordre 3 dans le cas monodimensionnel). L'objectif des expériences numériques présentées dans ce paragraphe est de valider numériquement la démarche formelle suivie au chapitre 2 pour la dérivation des conditions équivalentes.

Nous avons testé les deux schémas numériques proposés au paragraphe précédent. Ils donnent tous les deux les mêmes résultats. Le premier schéma, étant explicite, est plus rapide. C'est celui qu'on a utilisé pour effectuer les tests qui suivent. Nous avons utilisé la même discrétisation spatiale pour le calcul de la solution exacte $(\mathbf{E}_h^\eta, \mathbf{H}_h^\eta)$ que pour le calcul de la solution approchée $(\tilde{\mathbf{E}}_h^\eta, \tilde{\mathbf{H}}_h^\eta)$ en utilisant la condition équivalente. Par ailleurs, le pas d'espace est choisi une fois pour toutes les expériences. Si on note $\lambda = \frac{c}{f}$ la longueur de l'onde incidente, alors :

$$\frac{\lambda}{h} \sim 10^3$$

Le choix d'un pas aussi petit est imposé par la plus petite valeur de η utilisée.

$$\frac{\lambda}{h} \sim 10^2$$

Les résultats sont présentés sous la forme de courbes qui tracent l'évolution temporelle en un point des deux composantes \mathbf{E}_y et \mathbf{E}_z du champ électrique. On fait varier d'un tracé à l'autre l'épaisseur η de la couche ferromagnétique.

Nous avons considéré, dans le cas des trois premières expériences des couches ferromagnétiques homogènes dont les caractéristiques illustrent les principaux types de comportement de la lois *LLG* :

Pour les deux premiers tests, on s'est placé en dehors du domaine de résonance [6]. On a choisi un premier cas où la norme de $\mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_s$ est faible par rapport à la norme de \mathbf{M}_0 . Le comportement de la couche est dans ce cas presque linéaire : on peut le démontrer en écrivant que la solution \mathbf{M} de l'équation *LLG* est une perturbation de sa valeur initiale de l'ordre de $|\mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_s|$ et en négligeant ensuite les termes d'ordre plus élevé. On peut le constater aussi sur la courbe de l'onde réfléchie en comparant la norme de la composante incidente \mathbf{E}_y à celle de \mathbf{E}_z . Pour la deuxième expérience, on a choisi au contraire d'envoyer une onde d'amplitude

plus grande que le module de l'aimantation initiale de la couche ferromagnétique. On constate alors un changement de polarisation plus net : $|\mathbf{E}_z|$ est du même ordre que $|\mathbf{E}_y|$.

La troisième expérience montre un cas où la fréquence du signal incident est proche de la fréquence de Larmor du milieu ferromagnétique. On observe une forte absorption de l'onde incidente même pour une couche de très faible épaisseur.

Les trois tests, et notamment le dernier d'entre eux, montrent bien l'effet d'absorption attendu d'un milieu ferromagnétique. L'interaction entre le moment magnétique et le champ magnétique incident engendre un changement de polarisation de l'onde incidente qui se trouve très bien représenté. On constate sur l'ensemble la bonne approximation fournie par la condition équivalente d'ordre trois. Cette approximation est, comme prévue, d'autant plus satisfaisante que l'épaisseur de la couche est petite.

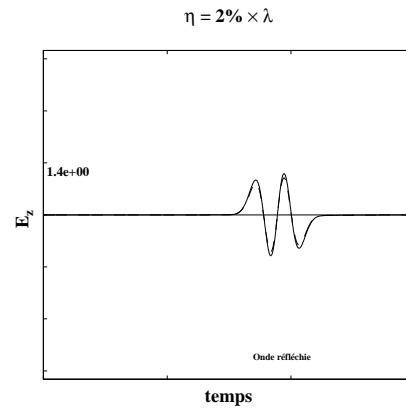
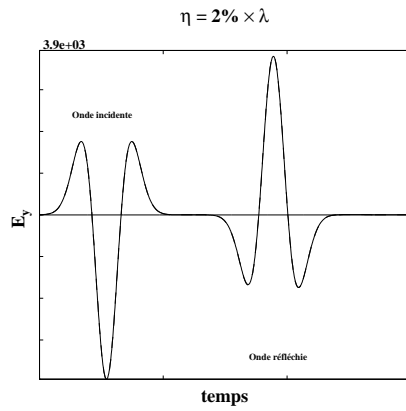
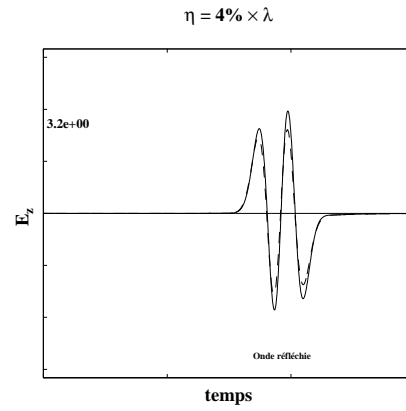
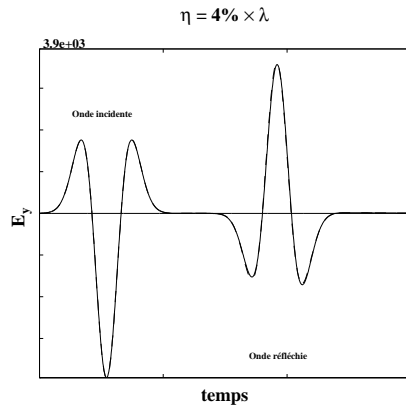
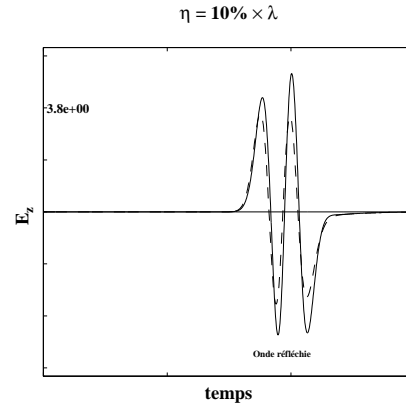
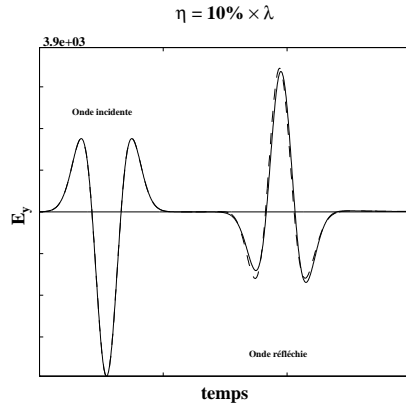
Premier cas test

Les paramètres de cette expérience sont :

$$\mathbf{M}_{0,y}(x) = 400 ; \quad \mathbf{H}_{s,y}(x) = 20 ; \quad \mathbf{H}_z = 10 ;$$

$$\alpha(x) = 0.5 ; \quad f = 5 \cdot 10^7 \text{ Hz} ; \quad \lambda = 6 \text{ m}.$$

Légende : — \mathbf{E}_h^η
 --- $\tilde{\mathbf{E}}_h^\eta$



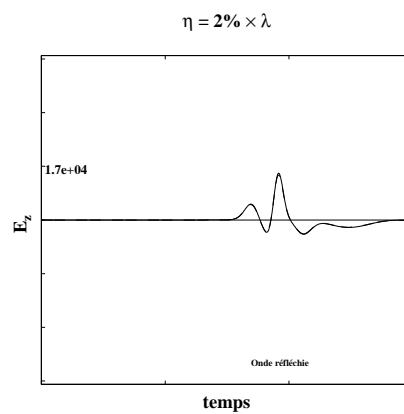
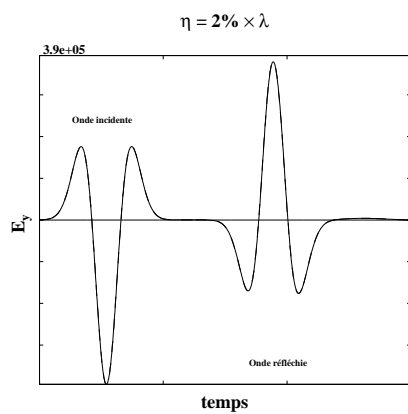
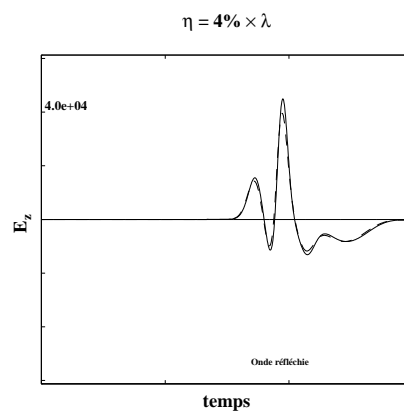
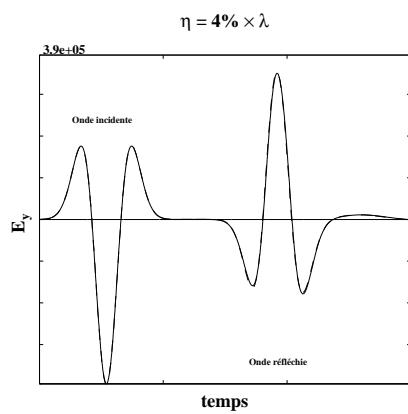
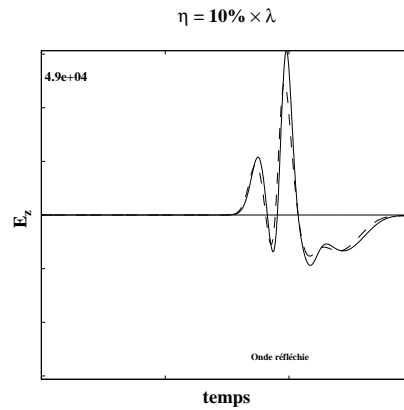
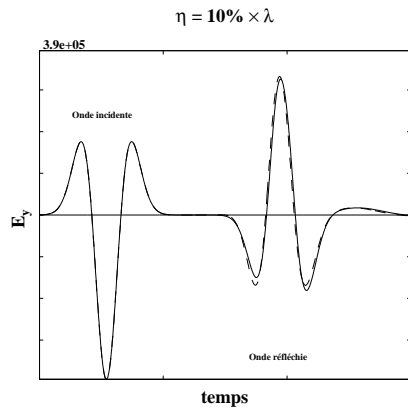
Deuxième cas test

Les paramètres de cette expérience sont :

$$\mathbf{M}_{0,y}(x) = 400 ; \quad \mathbf{H}_{s,y}(x) = 400 ; \quad \mathbf{H}_z = 1000 ;$$

$$\alpha(x) = 0.5 ; \quad f = 5 \cdot 10^7 \text{ Hz} ; \quad \lambda = 6 \text{ m}.$$

Légende : — \mathbf{E}_h^η
 --- $\tilde{\mathbf{E}}_h^\eta$



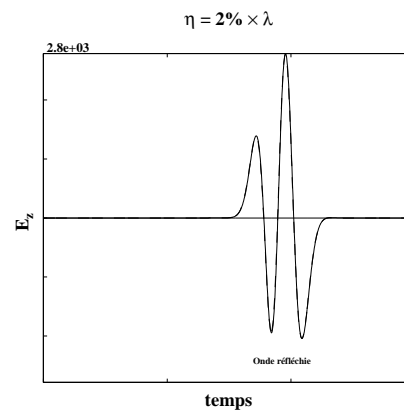
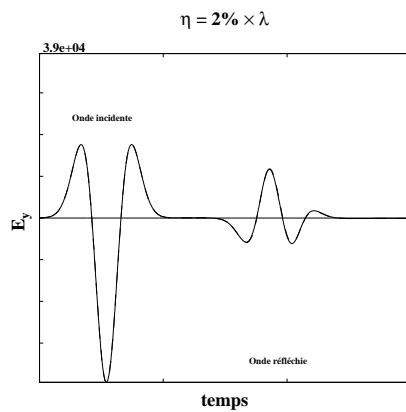
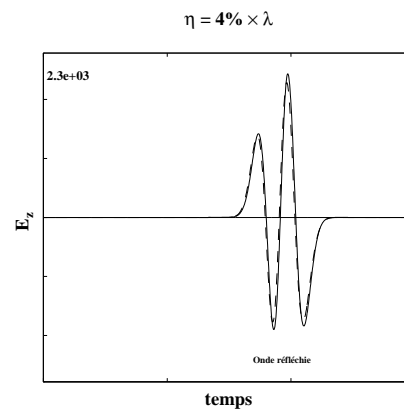
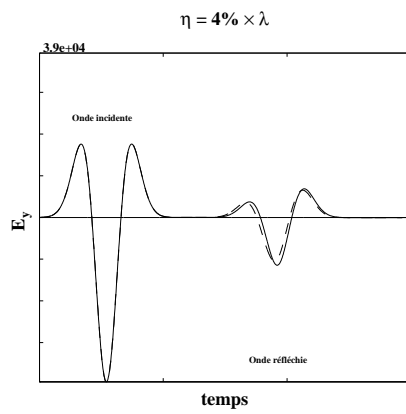
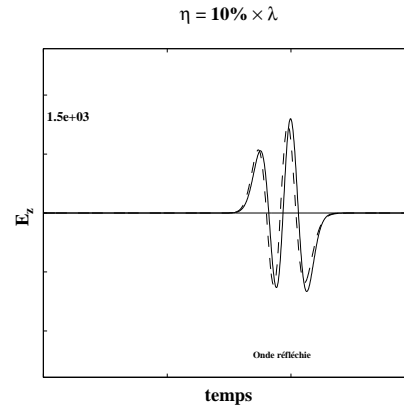
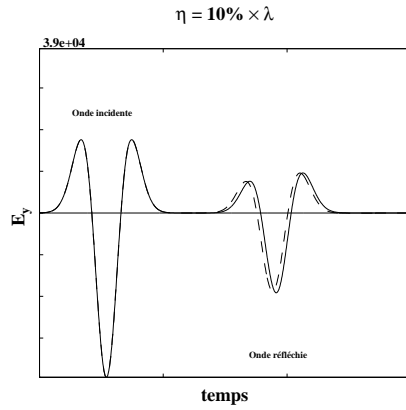
Troisième cas test

Les paramètres de cette expérience sont :

$$\mathbf{M}_{0,y}(x) = 4000 ; \quad \mathbf{H}_{s,y}(x) = 100 ; \quad \mathbf{H}_z = 100 ;$$

$$\alpha(x) = 0.5 ; \quad f = 5 \cdot 10^7 \text{ Hz} ; \quad \lambda = 6 \text{ m}.$$

Légende : — \mathbf{E}_h^η
 --- $\tilde{\mathbf{E}}_h^\eta$



D'un point de vue mathématique il est intéressant d'étudier numériquement l'ordre de la condition équivalente. Notre étude formelle du chapitre 2 postule que cet ordre est égal à trois. Nous pouvons faire un test de vérification en traçant

$$\log \left(\int_0^T |\mathbf{E}_h^\eta(x) - \tilde{\mathbf{E}}_h^\eta(x)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

en fonction de $\log(\eta/\lambda)$; où x désigne le point d'observation, η désigne l'épaisseur de la couche et λ désigne la longueur de l'onde incidente et T la durée de la simulation (l'utilisation d'une norme L_∞ donne les mêmes résultats). Il se pose néanmoins dans ce cas la question de la précision de la solution calculée. En effet ce qu'on cherche à prouver est que :

$$\|\mathbf{E}^\eta - \tilde{\mathbf{E}}^\eta\| \sim Cte \cdot \eta^3.$$

Cependant, ce qu'on calcule est plutôt $\|\mathbf{E}_h^\eta - \tilde{\mathbf{E}}_h^\eta\|$, qui se comporte "formellement" comme la somme de trois termes :

$$\|\mathbf{E}_h^\eta - \mathbf{E}^\eta\| + \|\mathbf{E}^\eta - \tilde{\mathbf{E}}^\eta\| + \|\tilde{\mathbf{E}}_h^\eta - \tilde{\mathbf{E}}^\eta\|. \quad (4.2)$$

Pour trouver l'ordre exact de l'approximation, il est important alors de rendre petit le premier et le troisième terme de (4.2). De manière qualitative on peut formuler cette exigence par :

$$\sup_{\eta} \|\mathbf{E}_h^\eta - \mathbf{E}^\eta\| + \|\tilde{\mathbf{E}}_h^\eta - \tilde{\mathbf{E}}^\eta\| \ll \inf_{\eta} \|\mathbf{E}^\eta - \tilde{\mathbf{E}}^\eta\|.$$

C'est le cas par exemple lorsque la norme de l'onde diffractée ne varie pas trop en fonction de η . Cette propriété est vérifiée dans les deux premières expériences ci-dessus présentées, mais pas dans le troisième cas test. Pour les trois courbes suivantes, nous avons fait varier $\frac{\eta}{\lambda}$ entre 0.03 et 0.1.

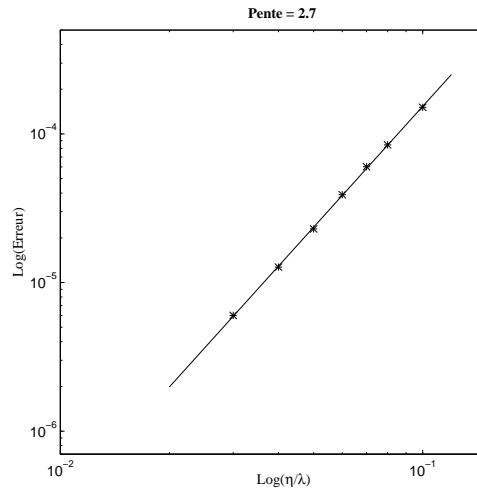


FIG. 4.2 – Courbe logarithmique de l'erreur relative au premier cas test

Nous remarquons qu'on a bien une droite de pente 2.7, proche de la valeur théorique attendue. Cela est également confirmé par la courbe suivante relative au cas de la deuxième expérience numérique.

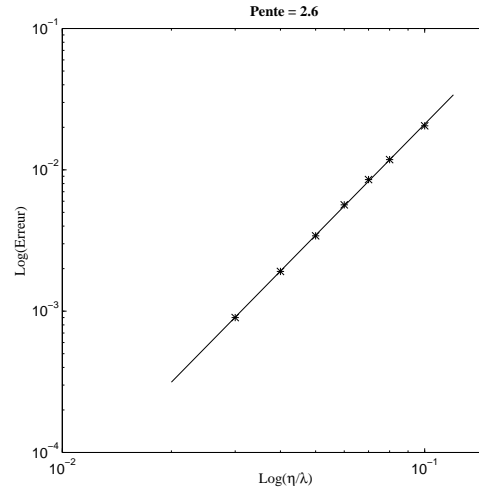


FIG. 4.3 – Courbe logarithmique de l'erreur relative au deuxième cas test

Toutefois, nous constatons moins bien sur la courbe suivante, relative au cas de la troisième expérience, la valeur théorique de la pente. Ceci reflète le fait que l'approximation numérique n'est pas négligeable devant l'approximation due à l'utilisation des conditions équivalentes. Par exemple, la différence due à un changement du pas de discrétisation pour $\eta = 0.1 * \lambda$ est du même ordre de grandeur que l'erreur entre la solution exacte et la solution approchée pour $\eta = 0.03 * \lambda$.

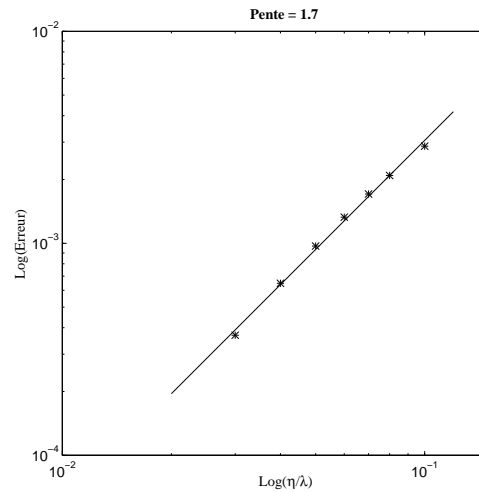


FIG. 4.4 – Courbe logarithmique de l'erreur relative au troisième cas test

4.2.1 Cas multi-couches

Après avoir considéré le cas d'une simple couche ferromagnétique, nous envisageons dans l'expérience suivante un cas où les caractéristiques de l'aimantation sont constantes par morceaux.

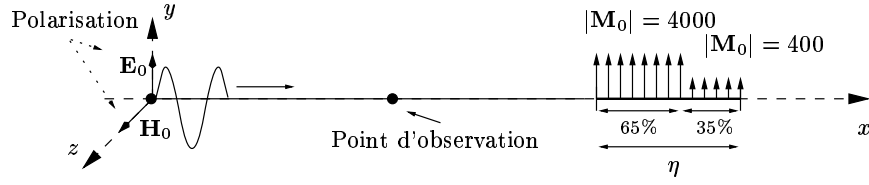


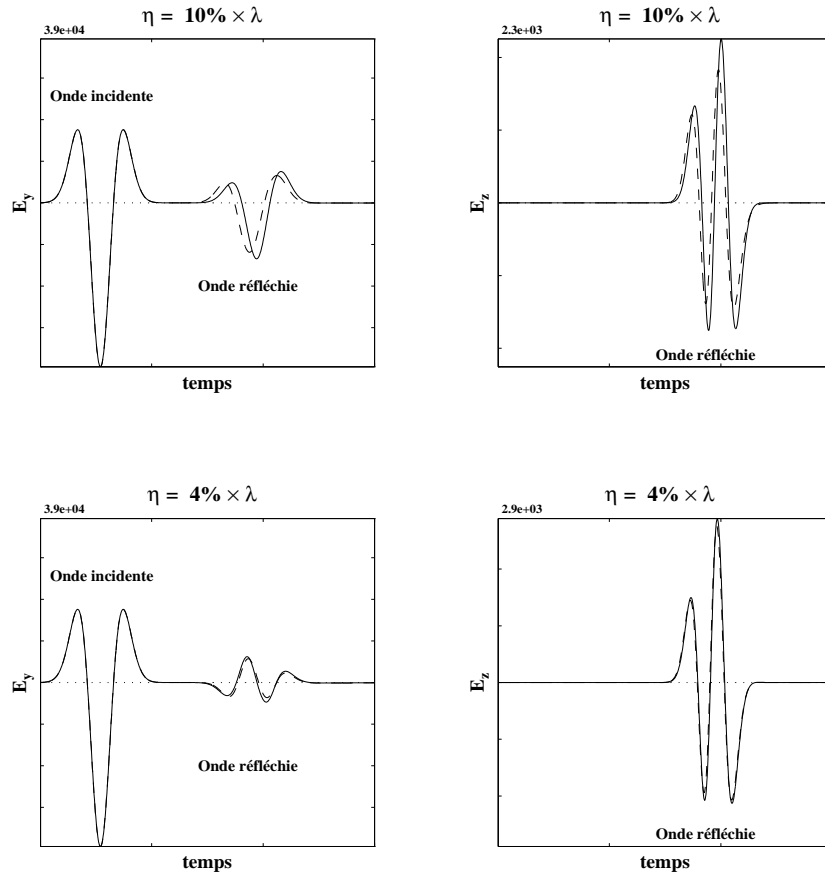
FIG. 4.5 – *Expérience à deux couches ferromagnétiques*

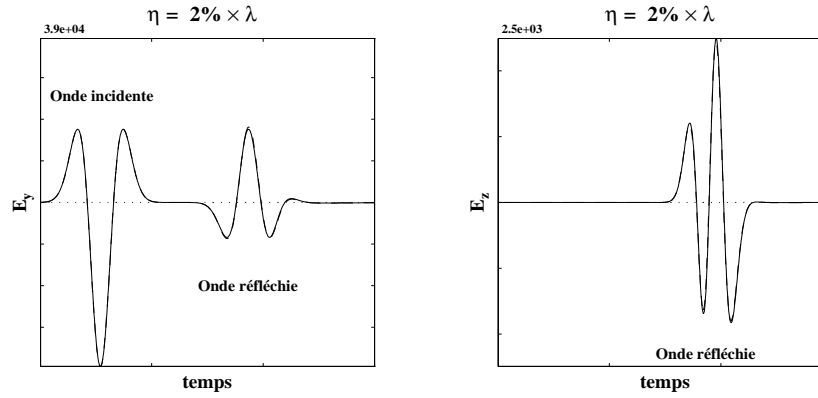
Les autres paramètres de l'expérience sont :

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{s,y}^1(x) &= 100 ; & \mathbf{H}_{s,y}^2(x) &= 20 ; & \mathbf{H}_z &= 10 ; \\ \alpha(x) &= 0.5 ; & f &= 5 \cdot 10^7 \text{ Hz} ; & \lambda &= 6 \text{ m}. \end{aligned}$$

Légende : — \mathbf{E}_h^η
 --- $\tilde{\mathbf{E}}_h^\eta$

On fait varier d'un tracé à l'autre l'épaisseur de la couche ferromagnétique.





Comme on l'a déjà remarqué, la condition d'ordre 2 ne rend pas compte de l'ordre d'empilement des couches (rappelons que ce n'est pas le cas de la condition d'ordre 4). On observe malgré tout que les résultats sont satisfaisants lorsque l'épaisseur de la couche est de l'ordre de 5% de la longueur d'onde incidente. Toutefois, pour effectuer des simulations avec des épaisseurs "relativement grandes" : $\eta \sim 10\%\lambda$, on constate la nécessité d'aller plus loin que l'ordre 2. C'est en effet l'objet du paragraphe suivant.

4.3 Amélioration apportée par la condition d'ordre 4

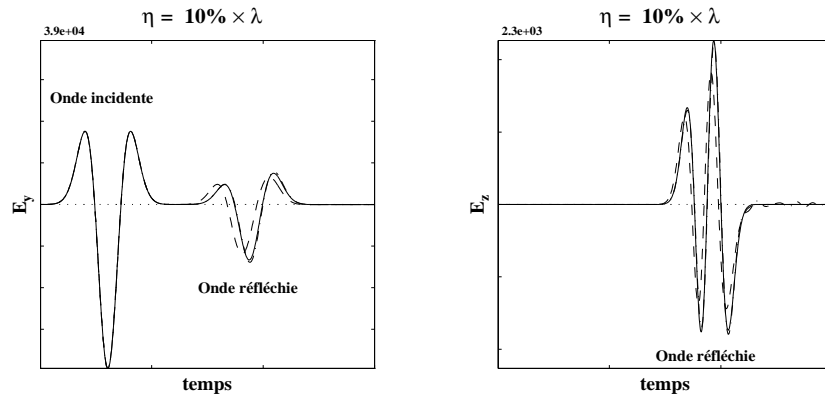
Dans les cas où la condition équivalente d'ordre 2 ne donne pas des résultats satisfaisants (généralement lorsqu'on est à la limite de validité de l'hypothèse : $\eta \ll \lambda$), on est tenté d'utiliser des conditions d'ordre supérieurs afin de mieux approcher la solution exacte. La condition d'ordre 4 répond en effet à cette attente. Son expression exacte donnée par (2.47) a néanmoins le désavantage d'être non locale en espace, de plus le schéma numérique proposé : (3.52) et (3.52), est implicite. Ainsi son utilisation n'est probablement pas avantageuse d'un point de vue numérique. Cependant, nous avons démontré que, dans le cas d'une couche homogène, on peut écrire une autre condition d'ordre 4 locale en espace et donc plus intéressante pour la mise en œuvre numérique (2.40). Toute l'étude théorique et numérique faite dans le cas "plus compliquée" d'une couche non homogène s'applique de manière immédiate au cas de cette condition locale en espace.

Il suffit par exemple de remplacer $\int_0^1 \theta(\xi, \zeta) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \tilde{\Phi}^\eta(\zeta, t) d\zeta$ par $\chi(\xi) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \tilde{\Phi}^\eta(\xi, t)$ dans (2.47).

C'est cette condition, modifiée par les mêmes considérations de stabilité évoquées au chapitre 2, qu'on va utiliser et qu'on appliquera à un cas non homogène. Bien entendu cette condition n'est plus d'ordre 4 dans ce cas, mais comme on le constatera sur les courbes suivantes elle améliore considérablement les résultats.

En effet considérons le cas de l'expérience décrite par la figure (4.2.1), et traçons l'évolution temporelle de la solution au point d'observation. La figure suivante compare trois types de résultats :

Légende :	—	Solution exacte
	----	Condition équivalente d'ordre 2
	---	Condition équivalente d'ordre 4



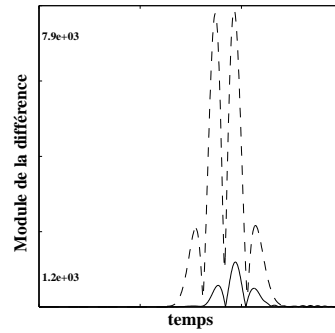
On remarque nettement l'amélioration apportée par la condition d'ordre 4, puisque la courbe qui lui correspond est pratiquement confondue avec la courbe de la solution exacte. On observe de manière plus nette cette amélioration sur la courbe suivante qui trace l'évolution temporelle au même point d'observation, du module de la différence entre la solution exacte et la solution approchée pour les deux conditions équivalentes :

Légende: — $(E^\eta - \tilde{E}_4^\eta)$
 --- $(E^\eta - \tilde{E}_2^\eta)$

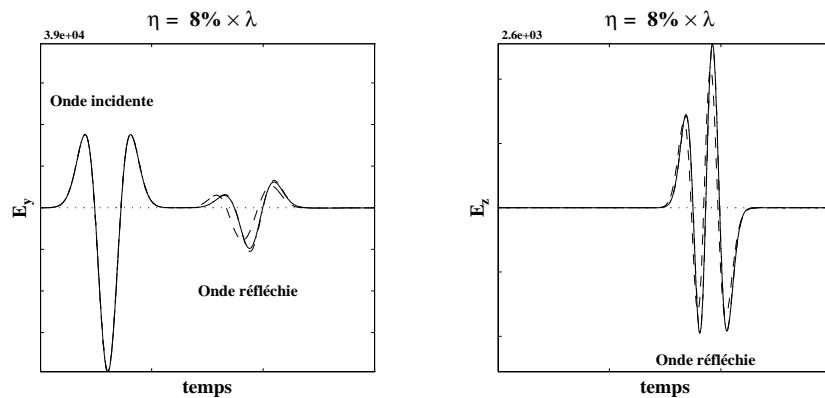
avec :

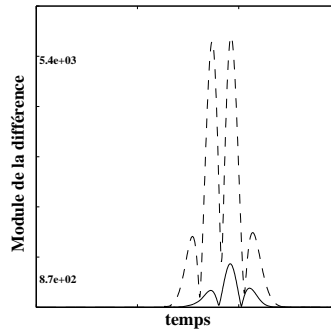
\tilde{E}_4^η : solution calculée en utilisant la condition d'ordre 4.

\tilde{E}_2^η : solution calculée en utilisant la condition d'ordre 2.



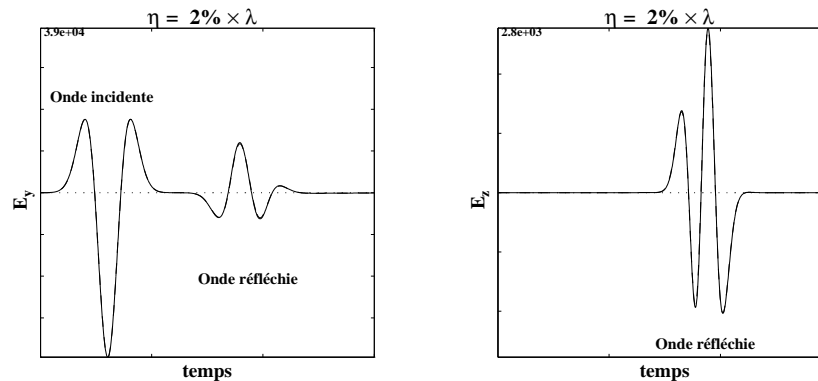
Nous avons tracé ces mêmes courbes pour une autre valeur de η légèrement inférieure à la la valeur précédente. On constate que les mêmes conclusions s'appliquent à ce cas.



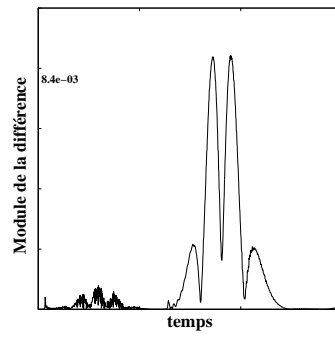


4.4 Apport des conditions équivalentes

L'intérêt des conditions équivalentes n'est pas simplement de retrouver la solution exacte mais surtout de pouvoir le faire à moindre coût. Prenons l'exemple de la troisième expérience où l'effet de la couche ferromagnétique est bien visible. Les courbes correspondant à $\eta = 2\% \lambda$ sont obtenus en utilisant un pas de discrétisation en espace $h = 0.0025$ c'est à dire par un calcul à 1200 points par longueur d'onde ! L'objectif était de valider simplement les conditions équivalentes sans avoir à se préoccuper des erreurs numériques. Soyons maintenant plus réaliste et essayons de faire le calcul le moins cher possible. Pour la solution exacte on sait d'avance qu'il faut utiliser un pas d'espace inférieur à la taille η du domaine ferromagnétique. On est donc obligé d'utiliser une discrétisation plus fine que 50 points par longueur d'onde. Ce problème ne se pose pas lorsqu'on utilise les conditions équivalentes. A priori on est libre de choisir le pas d'espace qu'on juge nécessaire pour la convergence de la solution discrète. Utilisons alors 10 points par longueur d'onde et comparons les résultats avec la solution exacte calculée à l'aide de 1200 points par longueur d'onde. Nous obtenons le graphique suivant (où les deux courbes sont pratiquement confondues) :



On peut également tracer l'évolution temporelle de l'erreur relative :



On constate qu'on approche la solution exacte avec une très bonne précision et ceci même si on travaille dans des conditions optimales.

Bibliographie

- [1] A. BENDALI and K. LEMRABET, *The effect of a thin coating on the scattering of a time-harmonic wave for the Helmholtz equation*, SIAM J. Appl. Math. Vol. 58. No. 6. pp 1664-1693, (1996).
- [2] B. ENGQUIST and J. C. NEDELEC, *Effective boundary conditions for acoustic and electromagnetic scattering in thin layers*, Technical report, Ecole Polytechnique-CMAPX. Rapport Interne N. 278 (1993).
- [3] B. ENGQUIST and A. MAJDA, *Absorbing boundary conditions for the numerical simulation of waves*, Math. Comp., 31(139):629-651, Juillet 1977.
- [4] F. COLLINO *Conditions absorbantes d'ordre élevé pour des modèles de propagation d'ondes dans des domaines rectangulaires*, Technical report 1794, I.N.R.I.A, Novembre 1992.
- [5] P. JOLY and C. POIRIER, *An asymptotic approach of the scattering of electromagnetic waves by thin coatings with ferromagnetic materials*, Page proofs for John Wiley & Sons Ltd (1997).
- [6] P. JOLY and O. VACUS, *Mathematical and numerical studies of 1d non linear ferromagnetic materials*, In Numerical Methods in Engineering '96. ECCOMAS, Paris-France (1996).
- [7] P. JOLY and O. VACUS, *Mathematical and numerical studies of non-linear ferromagnetic materials*, M2AN, 1997.
- [8] P. JOLY and O. VACUS, *Propagation d'ondes en milieu ferromagnétique 1d : existence et unicité de solutions faibles*, Compte rendu de l'Académie des Sciences, 1996.
- [9] P. JOLY, G. METIVIER, and J. RAUCH, *Global solutions to Maxwell equations in a ferromagnetic medium* à paraître.
- [10] B. GUSTAFSON, H. KREISS, A. SUNDSTRÖM, *Stability theory of difference approximations for mixed initial boundary value problems*, Math. Comp 26(119): 649-686 (1972).
- [11] TREFETHEN LLOYD N., *Group Velocity Interpretation of the stability Theory of Gustafsson, Kreiss and Sundström*, Journal of Computational Physics, 1981.
- [12] A. VISINTIN, *On Landau-Lifchitz' equations for ferromagnetism*, Japan journal of applied mathematics, Vol. 2, pp. 69-84, (1985).

- [13] A. HARAUX *Nonlinear evolution equations – global behavior of solutions* , Springer-Verlag, (1981).
- [14] A. PAZY *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations* , New York-Berlin-Tokyo : Springer, (1983).
- [15] K. S. YEE, *Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations* , IEEE Trans. Antennas & Propagat., (1966), vol. AP-14, pp. 302-307.



Unit ´e de recherche INRIA Lorraine, Technopôle de Nancy-Brabois, Campus scientifique,
615 rue du Jardin Botanique, BP 101, 54600 VILLERS LÈS NANCY
Unit ´e de recherche INRIA Rennes, Irisa, Campus universitaire de Beaulieu, 35042 RENNES Cedex
Unit ´e de recherche INRIA Rhône-Alpes, 655, avenue de l'Europe, 38330 MONTBONNOT ST MARTIN
Unit ´e de recherche INRIA Rocquencourt, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 LE CHESNAY Cedex
Unit ´e de recherche INRIA Sophia-Antipolis, 2004 route des Lucioles, BP 93, 06902 SOPHIA-ANTIPOLIS Cedex

Éditeur
INRIA, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 LE CHESNAY Cedex (France)
<http://www.inria.fr>
ISSN 0249-6399